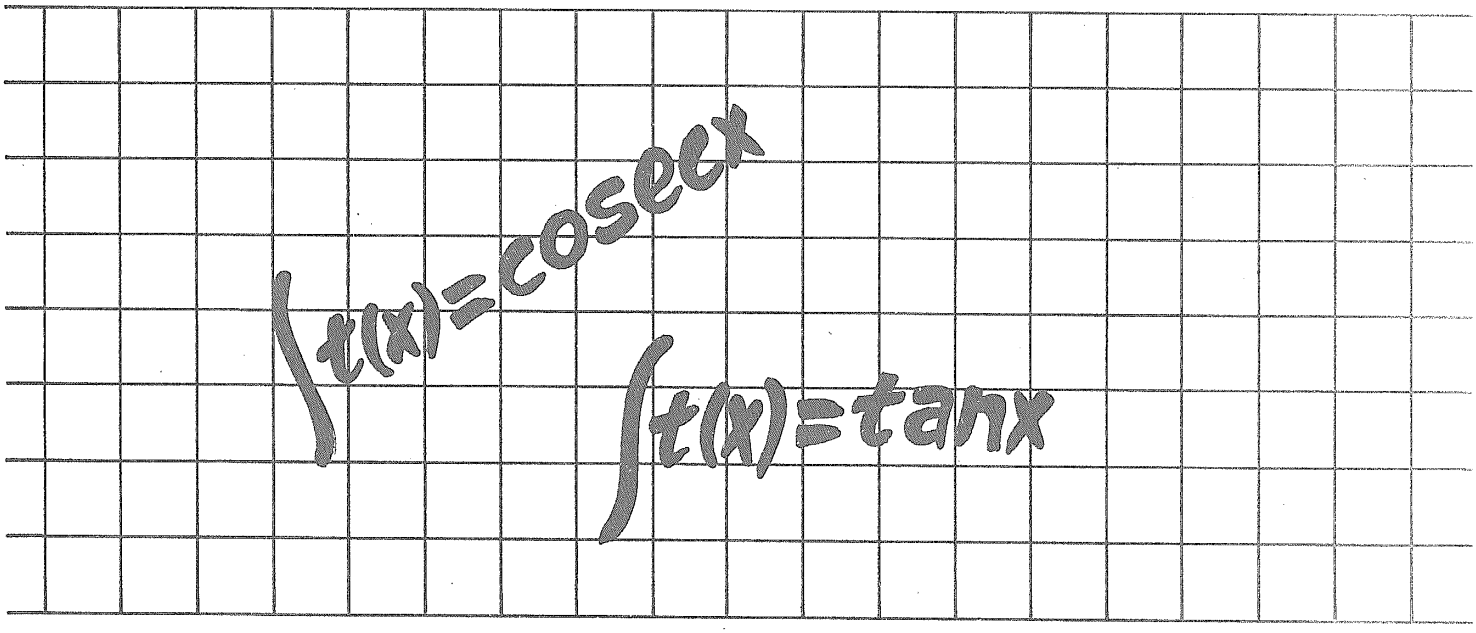
LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. Resoluciones de triángulos rectos
3. E' círculo trigonométrico
4. ***Las funciones trigonométricas***
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

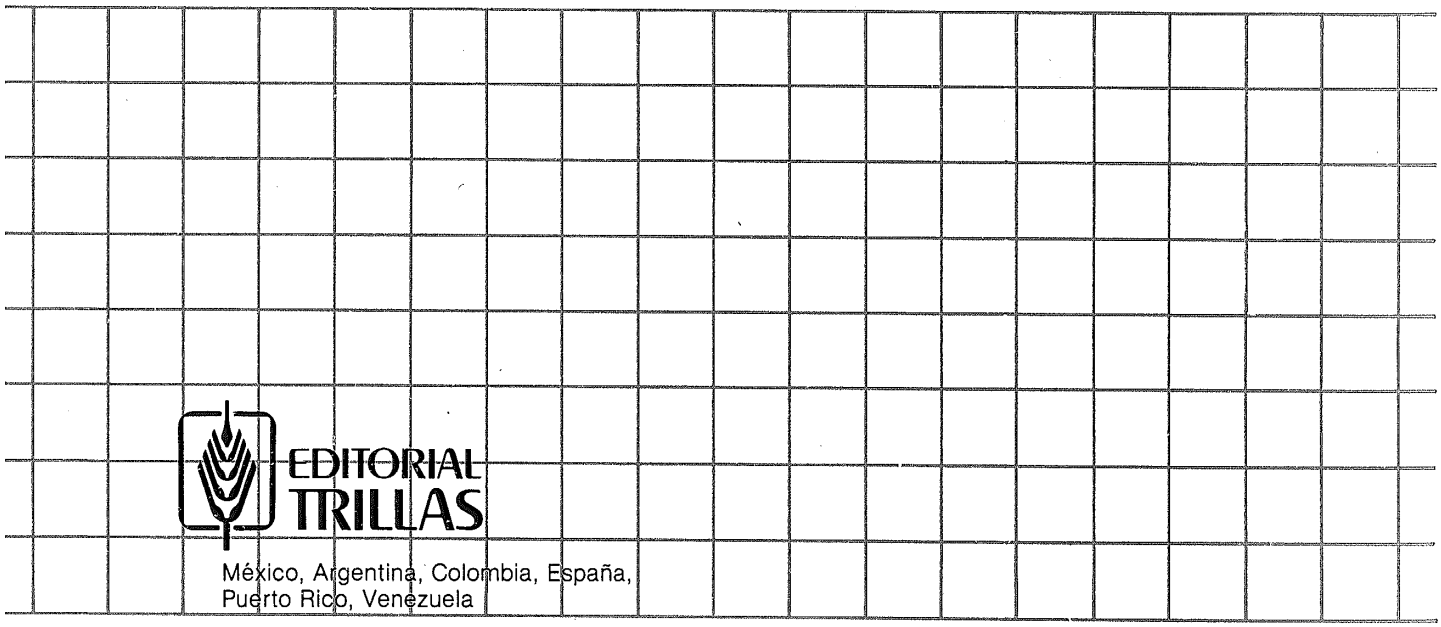
Bloque 5

Trigonometría

Módulo 4

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Conrado Flores García



EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0843-1

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 La expresión y = sen x interpretada como la regla de correspondencia de una relación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 9

4.2 La función seno 18

4.3 La función coseno 37

4.4 La función tangente 42

4.5 La función cotangente 59

4.6 La función secante 66

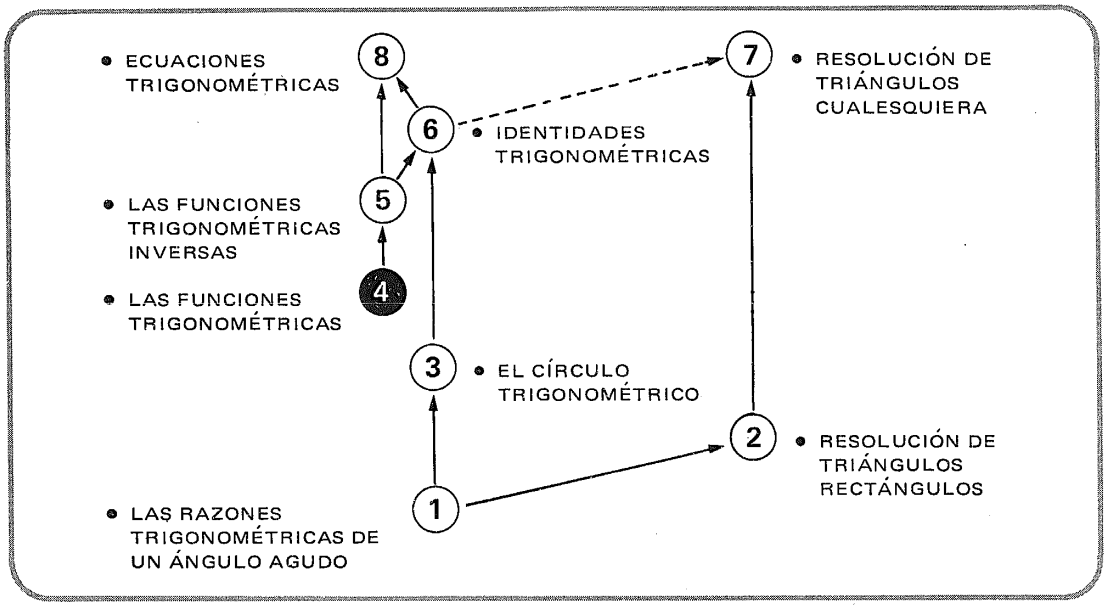
4.7 La función cosecante 79

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 4. Las funciones trigonométricas

Objetivos: caracterizar cada una de las seis funciones trigonométricas directas

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Relación y función (concepto, elementos, clasificación y representación gráfica)	2	7, 8
• Las razones trigonométricas de un ángulo agudo	5	1
• El círculo trigonométrico	5	3

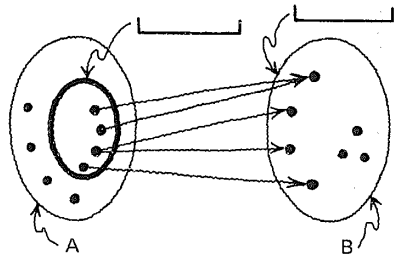
4.1

La expresión $y = \text{sen } x$
interpretada como la regla
de correspondencia de una
relación de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$

1

Recordemos que en una
relación de A × B
podemos identificar
dos conjuntos: A y B, y
una regla de correspondencia
que permite asignar a cada
uno de los elementos de A,
uno o más elementos de B.

2

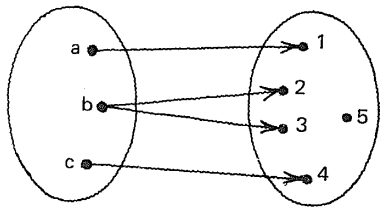


Hemos visto que

_____ de una relación
de A en B es el conjunto de los
elementos de A que tienen al menos
una imagen en el conjunto B,
al que hemos llamado _____

- dominio
- codominio

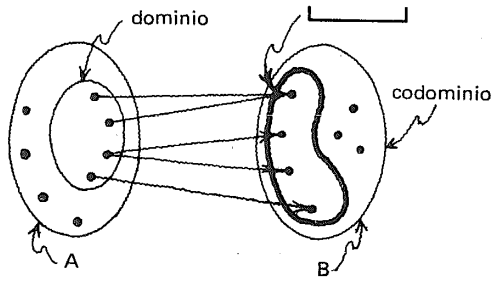
3



[_____] es el elemento o conjunto de elementos del codominio, que la regla de correspondencia asigna a un elemento dado del dominio.

Imagen

4



[_____] es el conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio, y únicamente de ellas.

rango

Rango

5

También hemos visto que

[_____]

es una relación tal, que a cada elemento del dominio le corresponde una imagen, y sólo una.

función

6

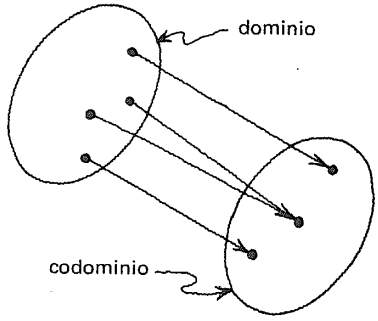
Cuando una **relación** está **definida por extensión** o enumeración de sus elementos, podemos identificarla como **función**

si **no hay dos pares ordenados con el mismo primer componente.**

Ejemplo: {(1, 2),(2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)}

7

Cuando la relación está representada por medio de una gráfica sagital podemos identificarla como función

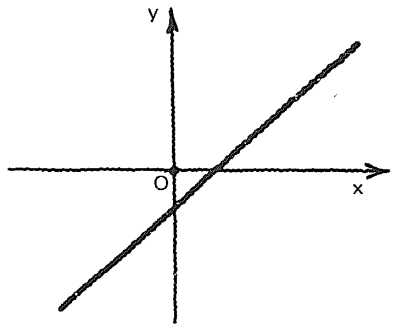


_____

sólo si no hay un elemento del dominio que sea origen de dos o más flechas.

8

Cuando la relación está representada por medio de una gráfica cartesiana, podemos identificarla como función si



_____

toda recta paralela al eje de las ordenadas, en cualquier punto del dominio, interseca a la gráfica en un punto, y sólo uno.

9

La expresión $f(x) = 5x + 4$ significa que la imagen de un elemento **x** es igual a $5x + 4$,

y es una forma de representar la

regla de correspondencia

de una función.

10

También hemos visto que la forma que adopte la regla de correspondencia

$$y = f(x)$$

nos permitirá definir diferentes clases de funciones.

11

Consideremos, ahora, la expresión

$$y = \text{sen } x$$

y veamos si puede ser considerada como la regla de correspondencia de una función.

12

La expresión

$$F = \{(x, y)/x \in D \wedge y \in C \wedge y = \text{sen } x\}$$

representa una función, si y sólo si la regla de correspondencia asigna a cada elemento **x** del dominio D un único elemento **y** del codominio **C.**

$y = \text{sen } x$

13

Pero,
¿qué son los elementos x?

Intentemos responder.

Son **números reales** que representan medidas de ángulos.

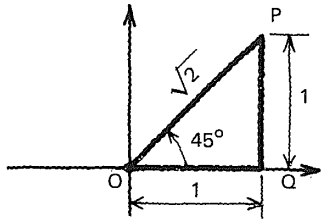
14

Y,
¿qué son los elementos?

Son **números reales** que representan razones de las medidas de dos segmentos rectilíneos (o bien: medidas de segmentos rectilíneos).

15

Por ejemplo, si la unidad de medida angular empleada es el grado, la regla de correspondencia **y = sen x** asigna al número real **45** el número real



- x = 45
- y = [ ]

- $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ó $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16

Esto lo podemos expresar así:

$$f(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Decimos que:

la imagen de [ ] es [ ]

- 45
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$

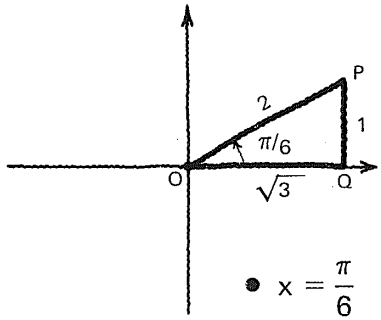
17

Si la unidad de medida empleada es el radián, la regla de correspondencia

y = sen x

asigna al número real $\frac{\pi}{6}$

el número real [ ]



- $x = \frac{\pi}{6}$
- y = [ ]

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$

18

La expresión

$$f(\pi/6) = \frac{1}{2}$$

significa que

[ ].

la imagen de $\frac{\pi}{6}$ es $\frac{1}{2}$

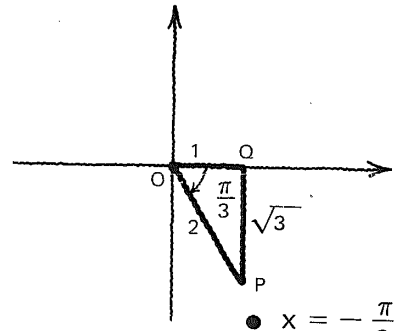
19

Si la unidad de medida empleada es el radián, la regla de correspondencia

$$y = \text{sen } x$$

asigna al número real $-\frac{\pi}{3}$

el número real [ ]



- $x = -\frac{\pi}{3}$
- $y =$ [ ]

- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

20

Escribimos:

$$f(-\tfrac{\pi}{3}) =$$ [ ],

que significa que:

[ ]

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

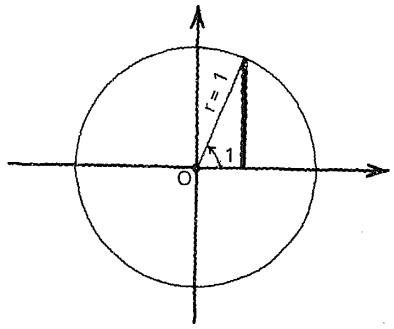
la imagen de $-\pi/3$ es $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

21

En el círculo unitario,
si la unidad de medida
empleada es el radián,
la regla de correspondencia

$$y = \text{sen } x$$

asigna al número real **1**
el número real $\boxed{}$ *



- $x = 1$
- $y \doteq \boxed{}$

* Usar tabla o calculadora.

Recuérdese que:

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

$$\doteq 57.2958^\circ$$
$$\doteq 57^\circ\, 18'$$

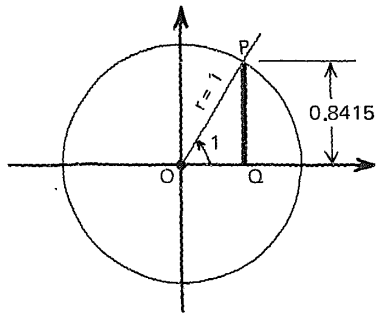
- 0.8415
- 0.8415

22

Observemos que:

0.8415

es la medida del segmento $\overleftrightarrow{PQ}$,
en el círculo unitario ($r = 1$)
(con aproximación de un
diezmilésimo).



23

$$F = \{(x, y)/x \in D, y \in C \wedge y = \text{sen } x\}$$

Consideraremos como **codominio C**
el **conjunto de todos los números reales:** $\mathcal{R}$.

24

$$F = \{(x, y)/x \in D, y \in \mathcal{R} \wedge \mathbf{y = sen\ x}\}$$

Como **dominio D** empezaremos por considerar el

conjunto de todos los números reales: $\mathcal{R}$,

e investigaremos si hay alguna restricción en él, es decir, si existen elementos $x \in \mathcal{R}$ que no tienen imagen en el codominio.

25

Queda definida la relación

posible restricción en el dominio.

$$F = \{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \wedge \square \wedge \mathbf{y = sen\ x}\}$$

Para saber si se trata de una **función**, empezaremos por trazar su **gráfica cartesiana.**

5.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* qué es una relación de A en B, así como los siguientes conceptos:

  —función,
  —dominio,
  —codominio,
  —imagen,
  —rango;

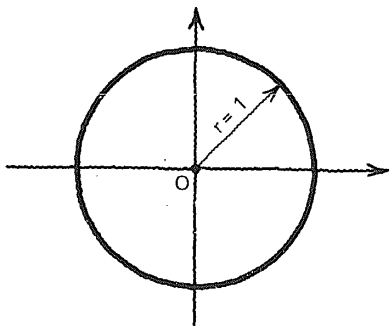
- *interpretar* la expresión $y = \text{sen } x$ ó $f(x) = \text{sen } x$ como la regla de correspondencia de una relación de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}$.

4.2

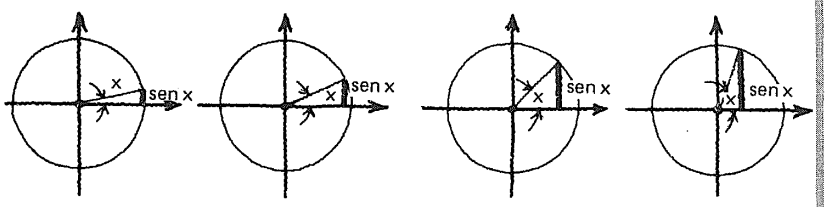
La función seno

26

Consideremos un círculo unitario.



27



Observemos cómo a medida que el ángulo **x** aumenta de 0 a $\pi/2$ radianes (0° a 90°), **sen x** aumenta de____ a____.

0 1

28

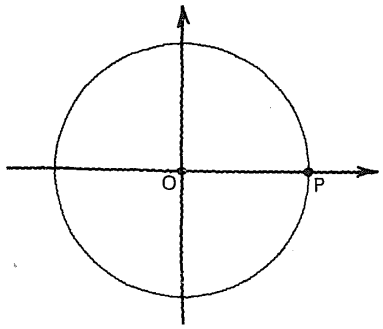
$y = f(x) = \text{sen } x$

Para un ángulo nulo:

$\text{sen } 0 =$ ____

ó

$y = f(0) =$ ____



0

0

29

$y = f(x) = \text{sen } x$

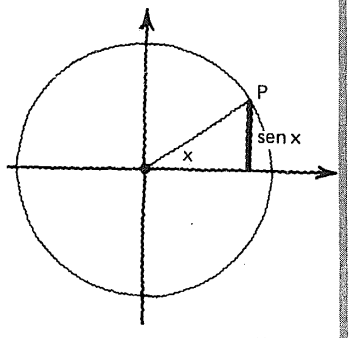
Sabemos que:

$\text{sen } \frac{\pi}{6} =$ ____ = ____

ó

$y = f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ ____ = ____

en forma de fracción decimal con 4 cifras decimales.



● $x = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

$\frac{1}{2}$ 0.5000

$\frac{1}{2}$ 0.5000

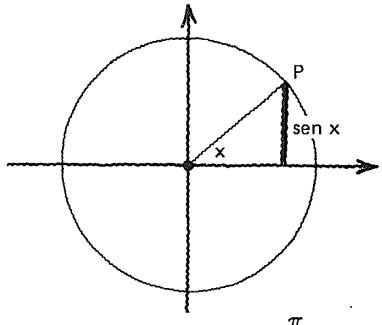
30

$y = f(x) = \text{sen } x$

$\text{sen } \frac{\pi}{4} =$ ____ ≐ ____

ó

$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ____ ≐ ____



● $x = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0.7071

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0.7071

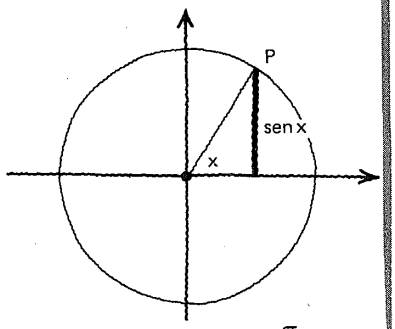
31

$y = f(x) = \text{sen } x$

$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \underline{\quad} \doteq \underline{\quad}$

ó

$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\quad} \doteq \underline{\quad}$



● $x = 60° = \frac{\pi}{6}$ rad.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0.8660

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0.8660

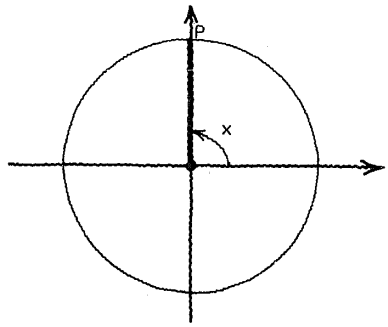
32

$y = f(x) = \text{sen } x$

$\text{sen } \frac{\pi}{2} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$

ó

$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\quad} = \underline{\quad}$



● $x = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

1 1.0000

1 1.0000

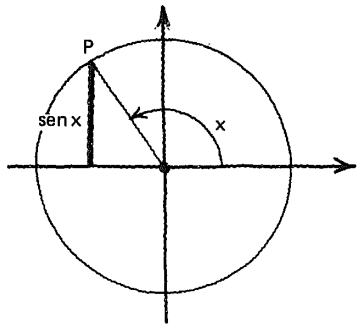
33

$y = f(x) = \text{sen } x$

$\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \underline{\quad} \doteq \underline{\quad}$

ó

$y = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{\quad} \doteq \underline{\quad}$



● $x = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad.

¡Atención!
Recuérdese que:

$\text{sen } x = \pm \text{ sen } x'$

siendo x' el ángulo de referencia.

Para $x = \frac{2\pi}{3}$

$x' = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Entonces, puesto que en el 2º cuadrante el seno es positivo:

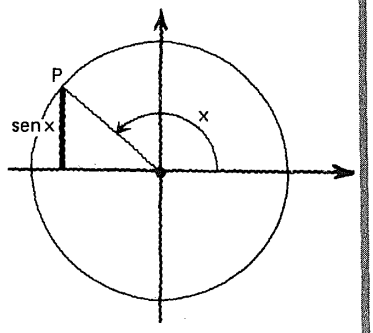
$\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.8660$

● $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ● 0.8660

34

$y = f(x) = \text{sen } x$

$y = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \underline{\quad} \doteq \underline{\quad}$ ..



● $x = 135° = \frac{3\pi}{4}$ rad.

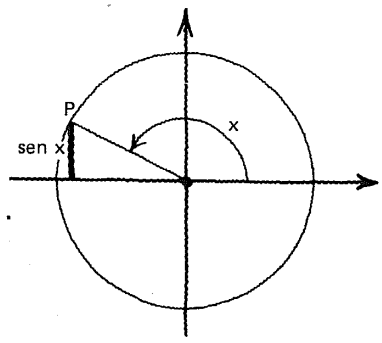
$\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0.7071

35

$y = f(x) = \text{sen } x$

$y = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \underline{\quad} = \underline{\quad}$.



● $x = 150° = \frac{5\pi}{6}$ rad.

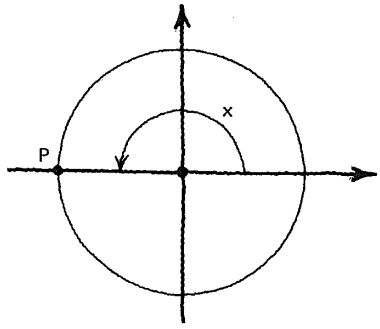
$\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \text{sen } \frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{2}$ 0.5000

36

$y = f(x) = \text{sen } x$

$y = f(\pi) = \underline{\quad}$.



● $x = 180° = \pi$ rad.

0

37

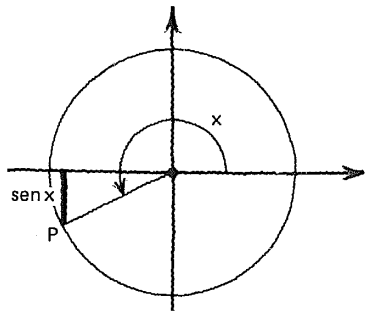
$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 180° + 30° = 210°$

$= \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$= \square = \square$



$\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{ sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\frac{7\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{6}$

$-\frac{1}{2}$ $\quad -0.5000$

38

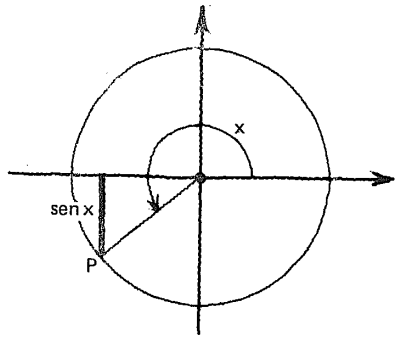
$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 180° + 45° = 225°$

$= \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$= \square \doteq \square$



$\text{sen } \frac{5\pi}{4} = -\text{ sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{5\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad -0.7071$

39

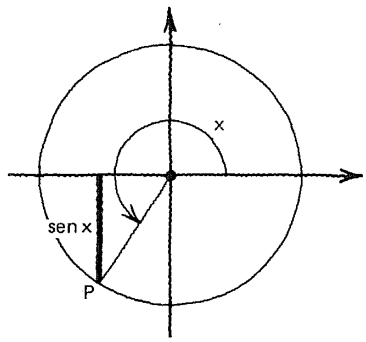
$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 180° + 60° = 240°$

$= \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$\doteq \square \doteq \square$



$\text{sen } \frac{4\pi}{3} = -\text{ sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{4\pi}{3}$

$\frac{4\pi}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad -0.8660$

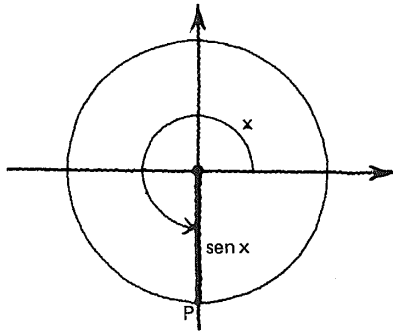
40

$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 270° = \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$= \square = \square$



$\frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2}$

$-1 \quad -1.0000$

41

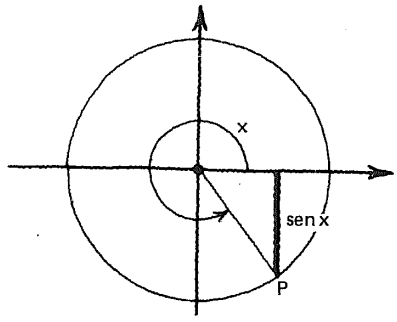
$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 270° + 30° = 300°$

$= \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$= \square \doteq \square$



$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{5\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -0.8660$

42

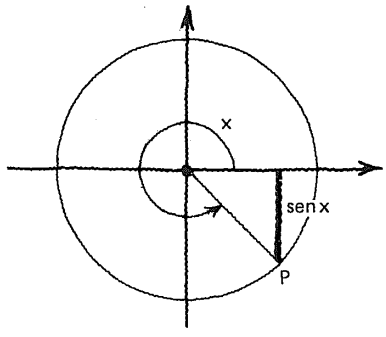
$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 270° + 45° = 315°$

$= \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$= \square \doteq \square$



$\text{sen } \frac{7\pi}{4} = -\text{sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{7\pi}{4}$

$\frac{7\pi}{4}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -0.7071$

43

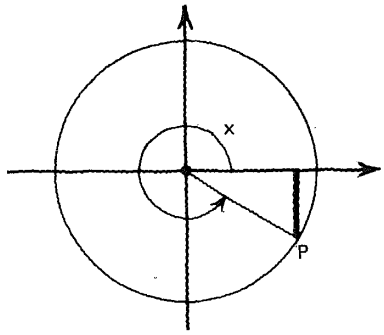
$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 270° + 60° = 330°$

$= \square$ radianes.

$y = f(\square)$

$= \square = \square$



$\text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\text{ sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\frac{11\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6}$

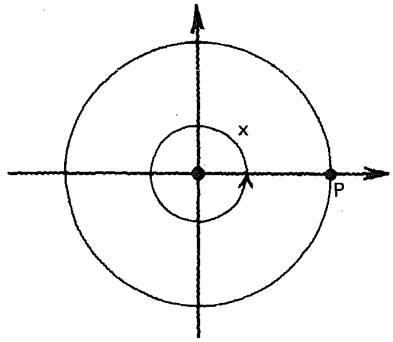
$-\frac{1}{2}$ $\quad -0.5000$

44

$y = f(x) = \text{sen } x$

$x = 360° = \square$ radianes.

$y = f(\square) = \square$.



2π

2π $\quad 0$

45

Reunamos en una tabla la información obtenida hasta el momento.

46

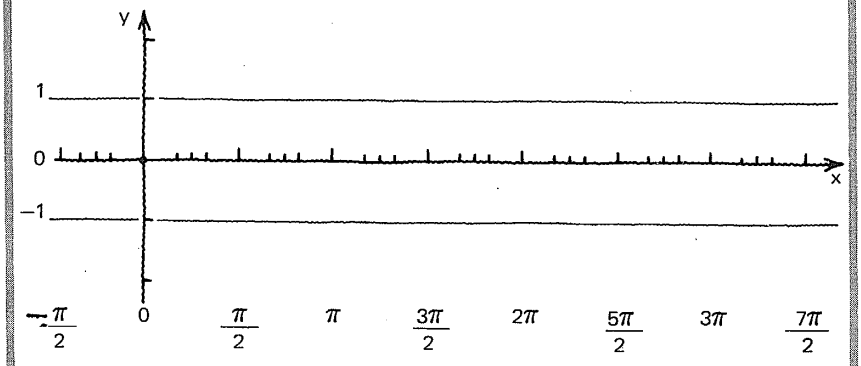
elementos del dominio → | ← imágenes

x	$y = sen\ x$
0	0.0000
$\pi/6$	0.5000
$\pi/4$	0.7071
$\pi/3$	0.8660
$\pi/2$	1.0000
$2\pi/3$	0.8660
$3\pi/4$	0.7071
$5\pi/6$	0.5000
π	0.0000
$7\pi/6$	− 0.5000
$5\pi/4$	− 0.7071
$4\pi/3$	− 0.8660
$3\pi/2$	− 1.0000
$5\pi/3$	− 0.8660
$7\pi/4$	− 0.7071
$11\pi/6$	− 0.5000
2π	0.0000

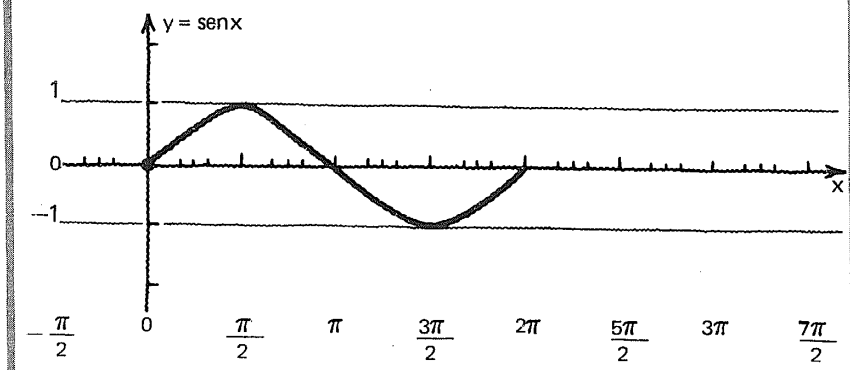
47

Representemos ahora, en el plano cartesiano del cuadro siguiente, los pares ordenados de la tabla anterior, y unamos los puntos resultantes mediante una línea continua.

48



Respuesta
en el
cuadro siguiente

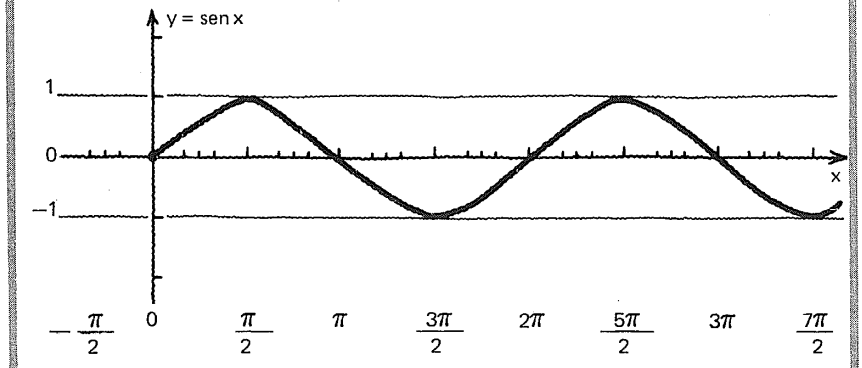


49

Enseguida anotamos algunas observaciones relacionadas con esa gráfica cartesiana.
Para valores de x mayores de 2π (360°), la gráfica se repite periódicamente hacia la derecha.

(Continuar el trazo de la gráfica.)

Respuesta
en el
cuadro siguiente



50

Si **x** adquiere valores negativos,

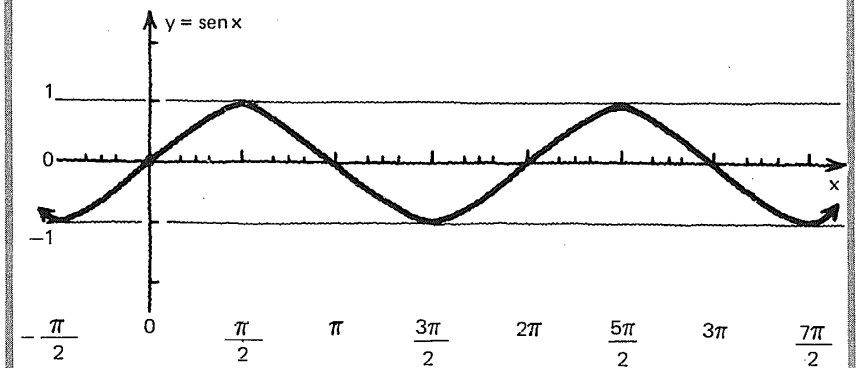
_____

Completar.

la gráfica se repite periódicamente hacia la izquierda.

Ver cuadro siguiente.

51



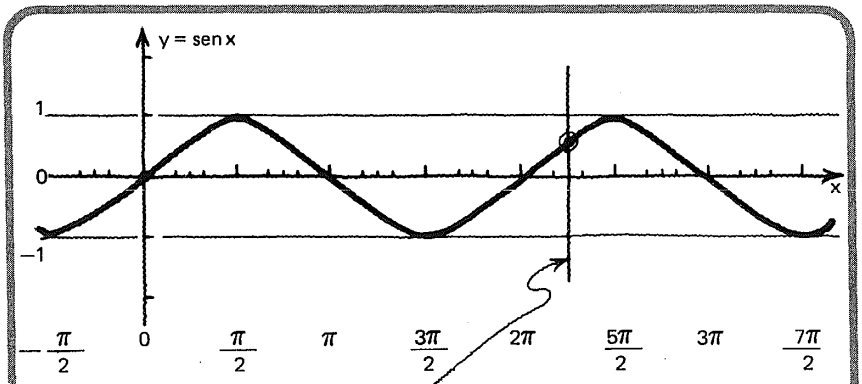
52

Ahora, con base en lo anterior, podemos responder lo siguiente.
¿La relación definida por
$y = \text{sen } x$ es una función?
Sí/No
¿Por qué?

[_____]

• Sí.
Porque en la gráfica cartesiana correspondiente, no es posible trazar una paralela al eje de las ordenadas dentro del dominio, que interseque a la gráfica en dos o más puntos.

53



Cualquier recta paralela al eje de las ordenadas (vertical) interseca a la gráfica en un punto único.

54

¿Cuál es el **dominio** de la función definida por $y = \text{sen } x$?

[_____].

$\mathbb{R}$
(el conjunto de todos los números reales)

55

Observamos que no existe ninguna restricción en el dominio que habíamos supuesto inicialmente.
La función **y = sen x**

está definida

para todos los números [ ]

reales.

56

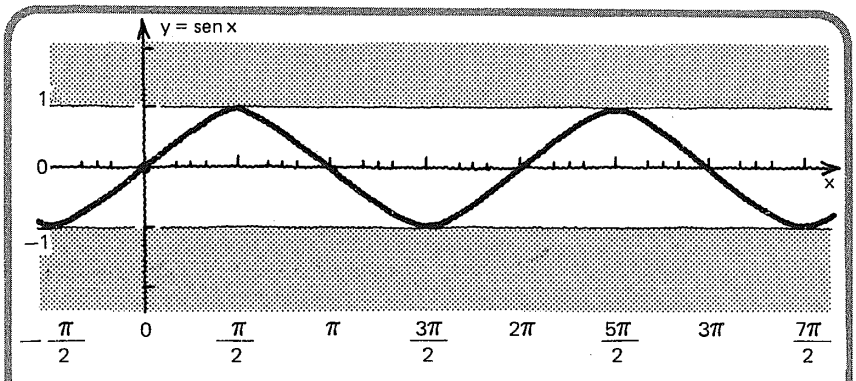
La **funcion seno** queda definida formalmente así:

$$F = \left\{ (x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R} \wedge \mathbf{y = sen\ x} \right\}$$

o así:

$$F: \mathcal{R} \to \mathcal{R}/f\mathbf{(x)} = \mathbf{sen\ x}$$

57



El **rango** de la función definida por y = sen x es [ ]

$\left\{ y/y \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$

58

$$R = \{ y/y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1 \}$$

No olvidemos que un conjunto como éste puede expresarse como un intervalo, así:

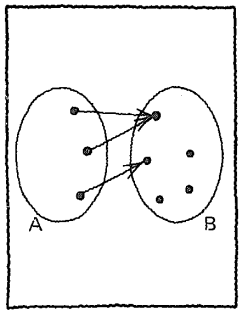
$[-1, 1]$ $\quad y \in \mathbb{R}$

59

Recordemos brevemente la clasificación de las funciones.

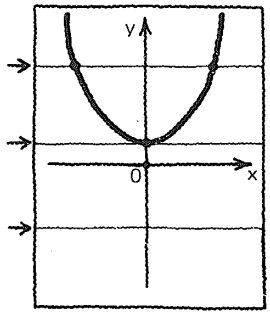
60

Función cualquiera.



De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.

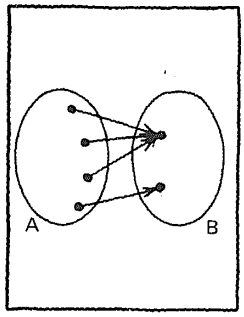
A cada elemento de B llega un número indiferente de flechas.



Una horizontal interseca a la gráfica en un número indiferente de puntos.

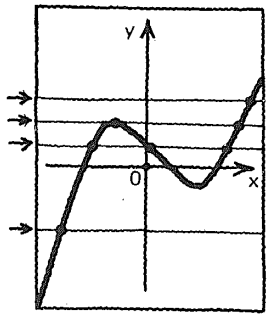
61

Función suprayectiva o suprayección.



De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.

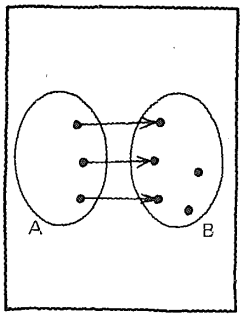
A cada elemento de B llega al menos una flecha.



Una horizontal interseca a la gráfica en al menos un punto.

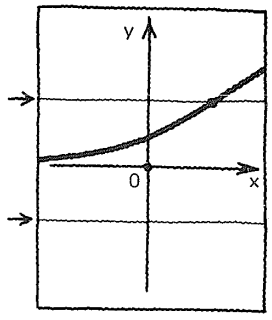
62

Función inyectiva o inyección.



De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.

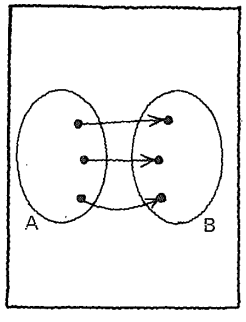
A cada elemento de B llega una flecha como máximo.



Una horizontal interseca a la gráfica en un punto como máximo.

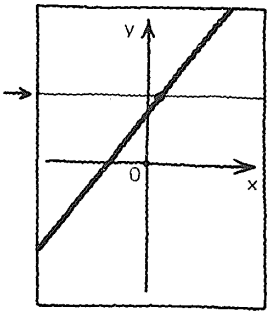
63

Función biyectiva o biyección.



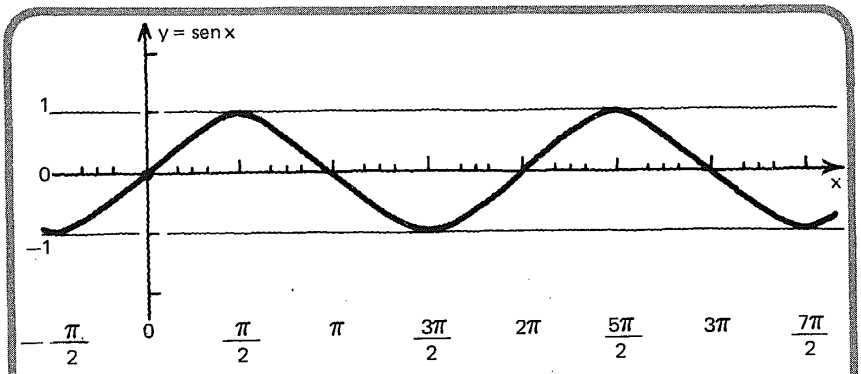
De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.

A cada elemento de B llega una flecha y sólo una.



Una horizontal interseca a la gráfica en un punto único.

64



Señalar la opción correcta.

La función definida por y = sen x es

- cualquiera ☐
- suprayectiva ☐
- inyectiva ☐
- biyectiva ☐

cualquiera

65

Señalar la opción correcta.

Definida la función en términos de **dominio** y **rango**, así:

$$F = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}, -1 \leqslant y \leqslant 1 \wedge \mathbf{y = sen\ x}\}$$

o así:

$$F: \mathcal{R} \to [-1, 1]/f(\mathbf{x}) = \mathbf{sen\ x}$$

podremos afirmar que es una

- suprayección ☐
- biyección ☐

suprayección

66

Decimos que:

si **restringimos** el **codominio** de $\mathcal{R}$ al rango $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ $\quad y \in \mathcal{R}$ la función definida por y = sen x es una **suprayección.**

67

Definamos otra clase de funciones.

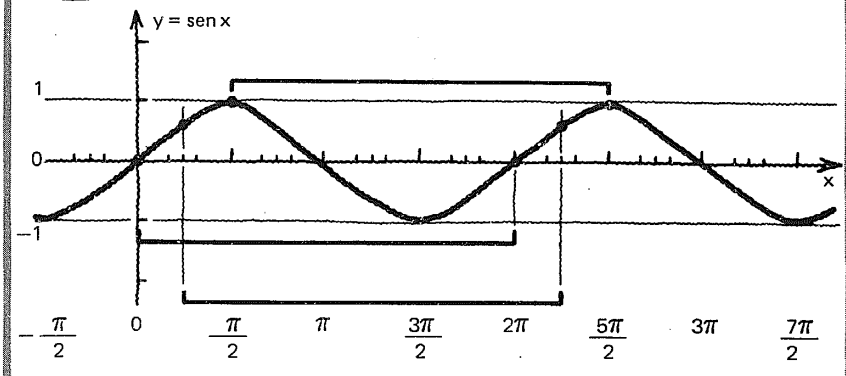
Si en una función definida por $y = f(x)$
se verifica que $f(x + p) = f(x)$
para toda x,
decimos que la función es **periódica.**

68

Al valor más bajo de **p**, tal que
se verifique $f(x + p) = f(x)$,
se le llama **periodo** de la función.

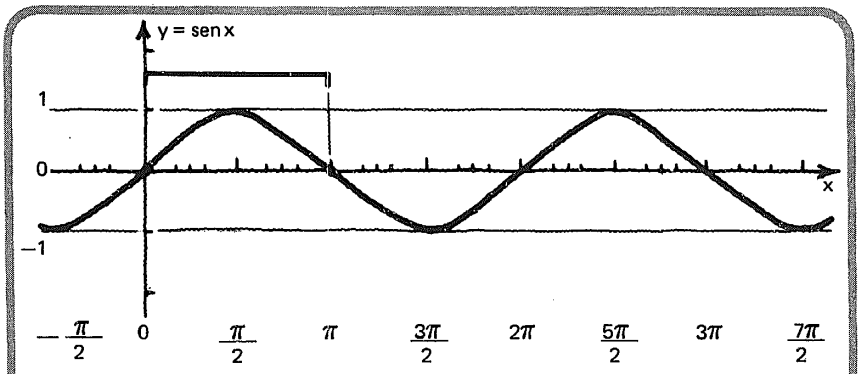
69

¡Atención!



Observamos que el periodo **p** para la función definida por $y = \text{sen } x$ es igual a 2π (360°)

70

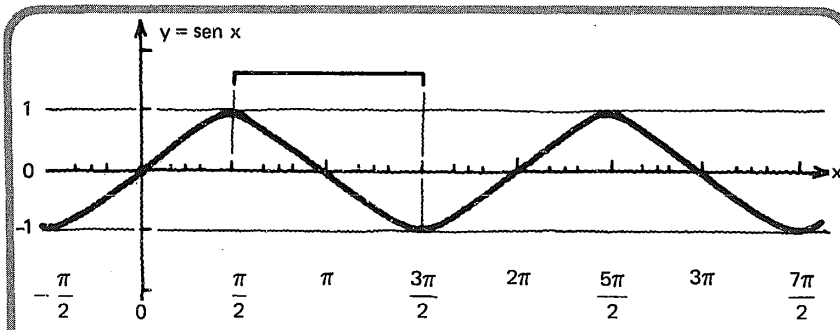


Vemos que.

Para $p = \pi$, si $x = 0$ ó $x = \pi$ $\Big\rangle$ $y = 0$

Ver cuadro siguiente.

71

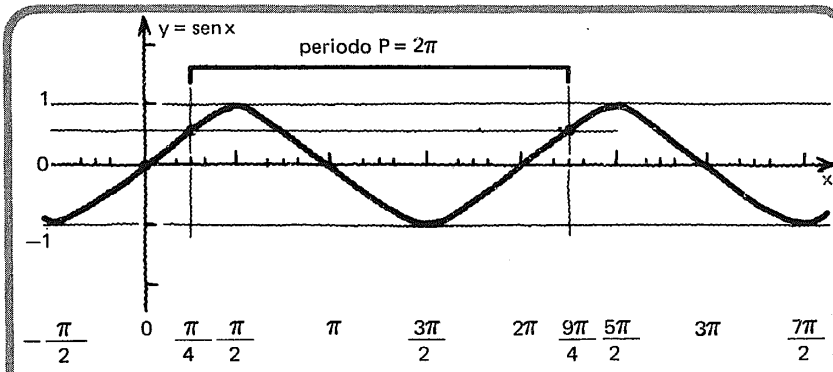


No obstante, tal cosa no se cumple para todos los valores de x.

Por ejemplo: si $x = \pi/2$ $\quad y = 1$

si $x = \frac{3\pi}{2}$ $\quad y = -1$

72



Si, por ejemplo, $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} \doteq 0.7071$,

entonces, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \text{sen}\ \frac{9\pi}{4} \doteq$ _____

0.7071

73

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \doteq 0.7071$

$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{sen} \frac{9\pi}{4} \doteq 0.7071$

También:

sen (____) = sen ____ $\doteq 0.7071$

sen (____) = sen ____ $\doteq 0.7071$

etcétera.

$\frac{\pi}{4} + 4\pi \qquad \frac{17\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} + 6\pi \qquad \frac{25\pi}{4}$

74

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \doteq 0.7071$

También:

$\operatorname{sen} (\frac{\pi}{4} - 2\pi) = \operatorname{sen}$ ____ $\doteq 0.7071$

sen(____) = sen ____ $\doteq 0.7071$

sen (____) = sen ____ $\doteq 0.7071$

etcétera.

$-\frac{7\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} - 4\pi \qquad -\frac{15\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} - 6\pi \qquad -\frac{23\pi}{4}$

75

En general,

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$

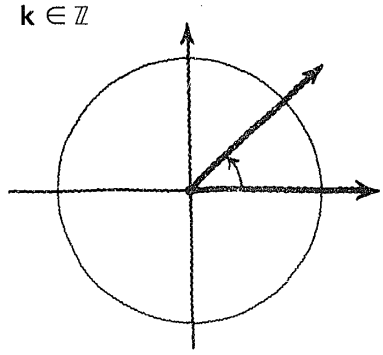
Y para cualquier x: ____ ____

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (x + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$

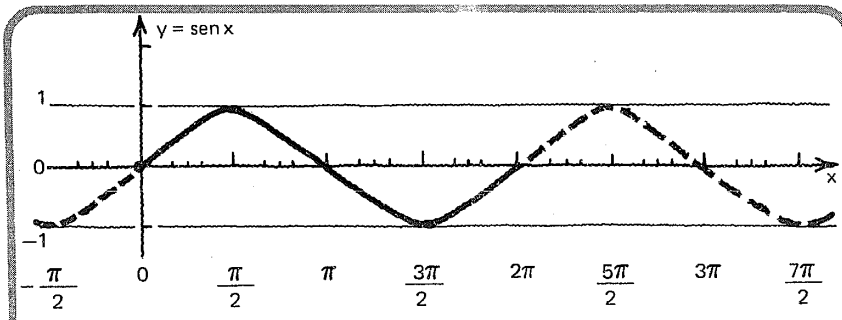
76

$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2k\pi)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Esto no es nuevo para nosotros. Ya habíamos descubierto este hecho al darnos cuenta de que todos los ángulos para los que el lado móvil ocupa la misma posición, tienen razones trigonométricas iguales.



77



La gráfica cartesiana de la función definida por $y = \text{sen } x$, nos permite ver que, en el intervalo $[0, 2\pi]$:

si $x \in (0, \pi)$ $\quad f(x) = \text{sen } x > 0$

si $x \in (\pi, 2\pi)$ $\quad f(x) = \text{sen } x$ ⌊⌋ 0

si $x \in$ ⌊⌋ $\quad f(x) = \text{sen } x = 0$

etcétera.

<

$\{0, \pi, 2\pi\}$

5.4.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la gráfica cartesiana de la función definida por $y = \text{sen } x$;
- *dar*, de la función definida por $y = \text{sen } x$,
  - el dominio,
  - el codominio,
  - el rango,
  - el periodo;
- *explicar* por qué la expresión $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = \text{sen } x$ define una función cualquiera, y por qué la expresión $F: \mathbb{R} \to [-1, 1]/f(x) = \text{sen } x$ define una suprayección.

4.3

La función coseno

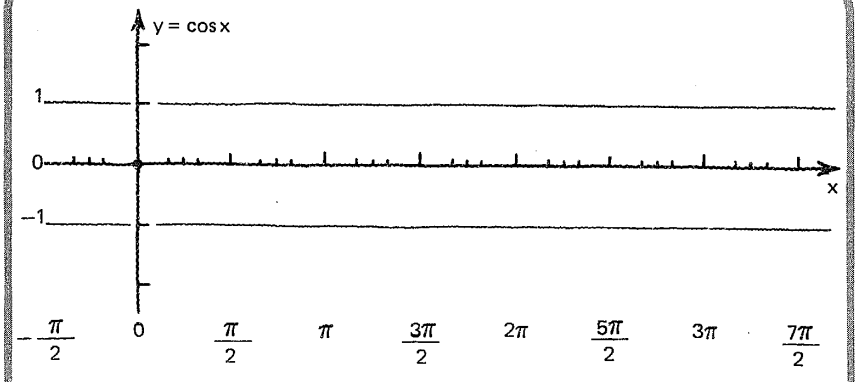
78

Con ayuda del círculo unitario, completemos la tabla adjunta, y anotemos los valores de cos x con 4 cifras decimales.

x	$y = \cos x$
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$5\pi/4$	
$4\pi/3$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$7\pi/4$	
$11\pi/6$	
2π	

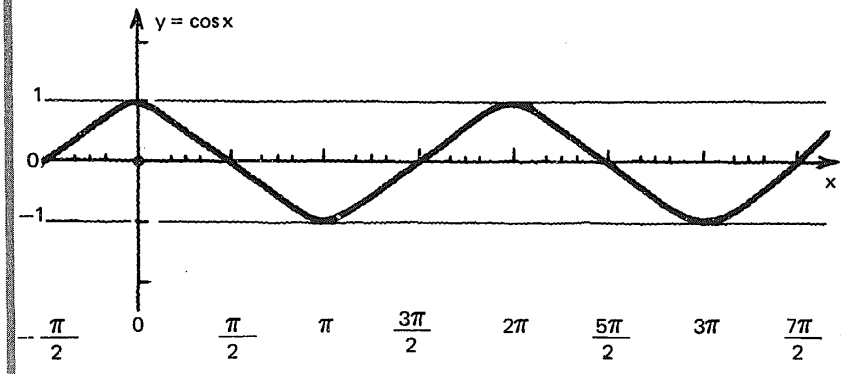
x	$y = \cos x$
0	1.0000
$\pi/6$	0.8660
$\pi/4$	0.7071
$\pi/3$	0.5000
$\pi/2$	0.0000
$2\pi/3$	− 0.5000
$3\pi/4$	− 0.7071
$5\pi/6$	− 0.8660
π	− 1.0000
$7\pi/6$	− 0.8660
$5\pi/4$	− 0.7071
$4\pi/3$	− 0.5000
$3\pi/2$	0.0000
$5\pi/3$	0.5000
$7\pi/4$	0.7071
$11\pi/6$	0.8660
2π	1.0000

79



Completar la gráfica cartesiana correspondiente a y = cos x.

Respuesta en el cuadro siguiente



80

¿La relación definida por $y = \cos x$ es una función?

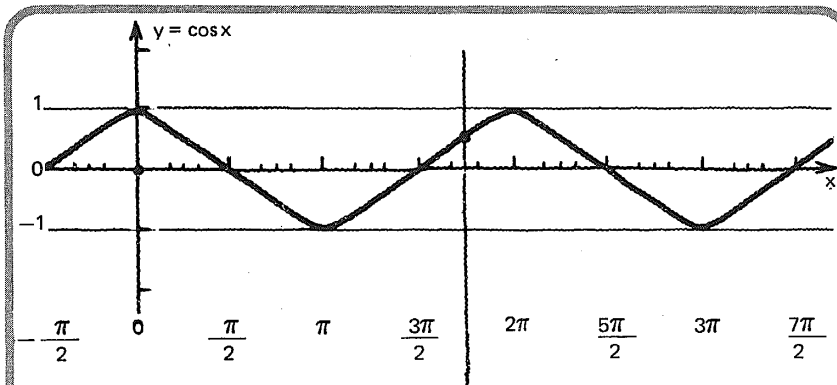
Sí/No

¿Por qué?

Sí.

Porque en su gráfica cartesiana no es posible trazar una "vertical" que interseque a la gráfica en dos o más puntos.

81



Toda vertical trazada dentro del dominio interseca a la gráfica en un punto único. →

82

El **dominio** de la función definida por $y = \cos x$ es

[_____].

$\mathcal{R}$ (el conjunto de todos los números reales)

83

$f(x) = \cos x$ se define para toda $x \in \mathcal{R}$.

84

El **rango** de la función definida por $y = \cos x$ es:

[_____] expresado como conjunto,

ó

[_____] expresado como intervalo.

$\{y/y \in \mathcal{R} \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

$[-1, 1] \quad y \in \mathcal{R}$

85

Señalar la opción correcta.

Definida en esta forma:

$$F = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R} \wedge \mathbf{y = \cos x}\}$$

es una función
- cualquiera ⌊___⌋
- suprayectiva ⌊___⌋
- inyectiva ⌊___⌋
- biyectiva ⌊___⌋

cualquiera

86

Señalar la opción correcta.

Definida así:

$$F = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}, -1 \leqslant y \leqslant 1 \wedge y = \cos x\}$$

o así:

$$F: \mathcal{R} \to [-1, 1]/f(\mathbf{x}) = \mathbf{\cos x}$$

es una función
- suprayectiva ⌊___⌋ .
- biyectiva ⌊___⌋ .

suprayectiva

87

Observemos que la función
definida por $\mathbf{y = \cos x}$
es **periódica**, con **periodo**

p = ⌊_____⌋

2π

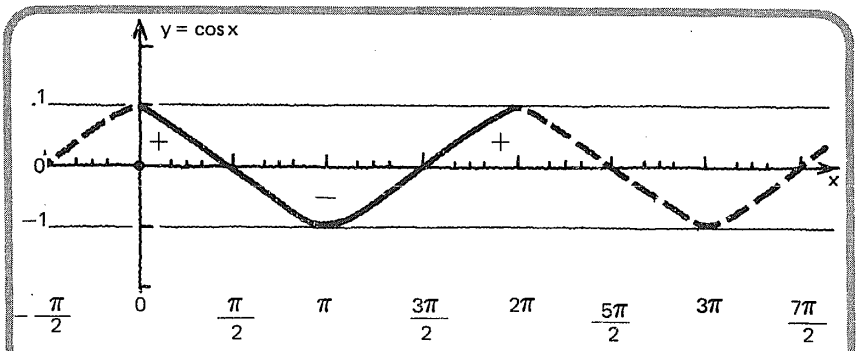
88

Si la función definida por $y = \cos x$ es periódica, con periodo igual a 2π, debe verificarse que:

$\cos x =$ [ ]

$\cos (x + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

89



En el intervalo $[0, 2\pi]$:

$\cos x > 0$ para toda x, tal que [ ]

$\cos x = 0$ para toda x, tal que [ ]

$\cos x < 0$ para toda x, tal que [ ]

- $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
- $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

5.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la gráfica cartesiana de la función definida por $y = \cos x$;
- *dar*, de la función definida por $y = \cos x$:

  — el dominio,
  — el codominio,
  — el rango,
  — el periodo;

- *explicar* por qué la expresión:
  $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \cos x$ define una función cualquiera
  y por qué la expresión:
  $F: \mathbb{R} \to [-1, 1] / f(x) = \cos x$ define una suprayección.

4.4

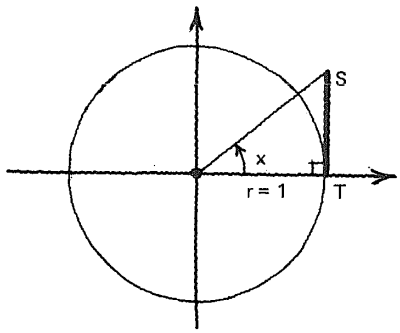
La función tangente

90

Recordemos que,
en el círculo unitario,

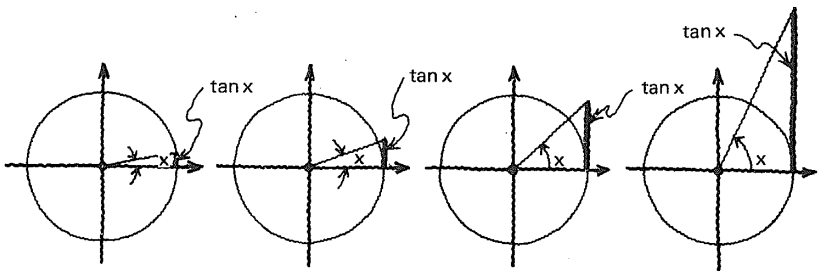
tan x

aparece representada $\overleftrightarrow{TS}$,
por el segmento
si $0 < x < \pi/2$



91

Atención.



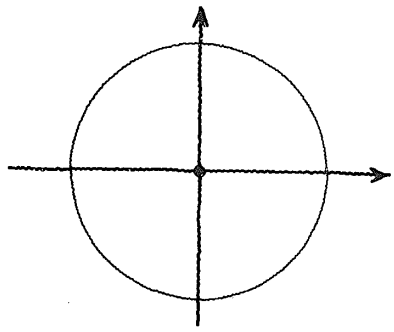
Observemos cómo a medida que x
aumenta, de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianes,

tan x aumenta indefinidamente a partir de cero.

92

$f(x) = \tan x$

$f(0) = \tan 0 =$ ⌊ ⌋



0

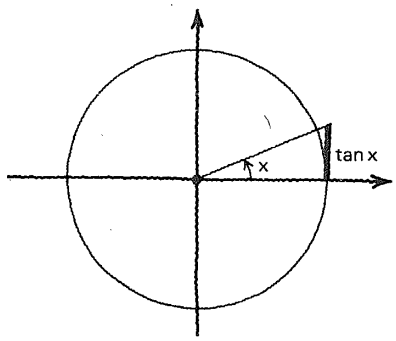
93

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} =$ ⌊ ⌋

$\doteq$ ⌊ ⌋

fracción con 4 cifras decimales



$\frac{\sqrt{3}}{3}$

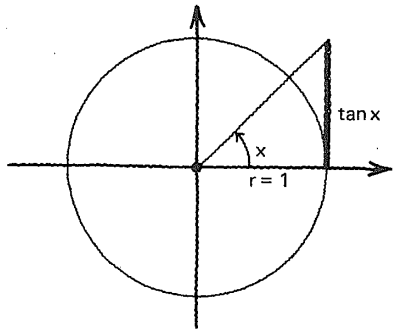
0.5774

94

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} =$ ⌊ ⌋

$\doteq$ ⌊ ⌋



1

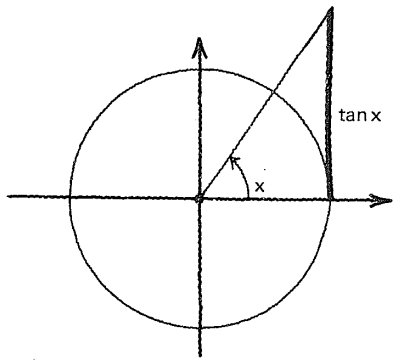
1.0000

95

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} =$ ⌊ ⌋

$\doteq$ ⌊ ⌋



$\sqrt{3}$

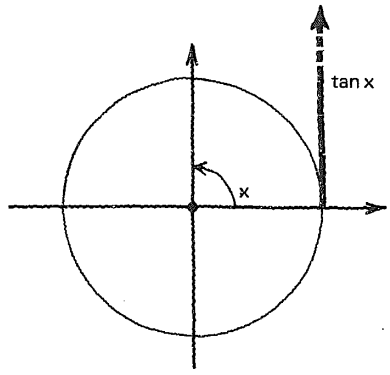
1.7321

96

Atención.

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{2} =$ ⌊ ⌋

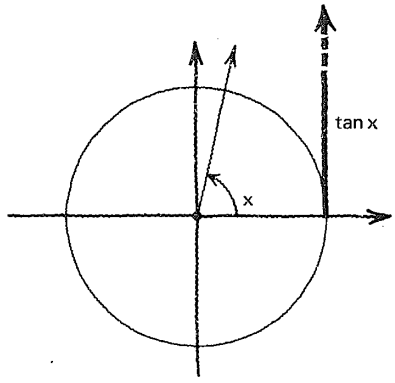


número no definido

97

Podemos observar cómo a medida que x aumenta, acercándose a $\pi/2$, tan x crece asumiendo valores tan grandes como se desee. Este hecho lo simbolizaremos así:

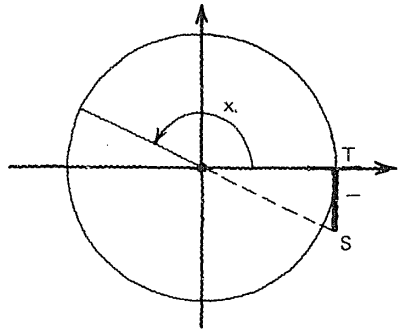
$$\tan \frac{\pi}{2} = +\infty$$



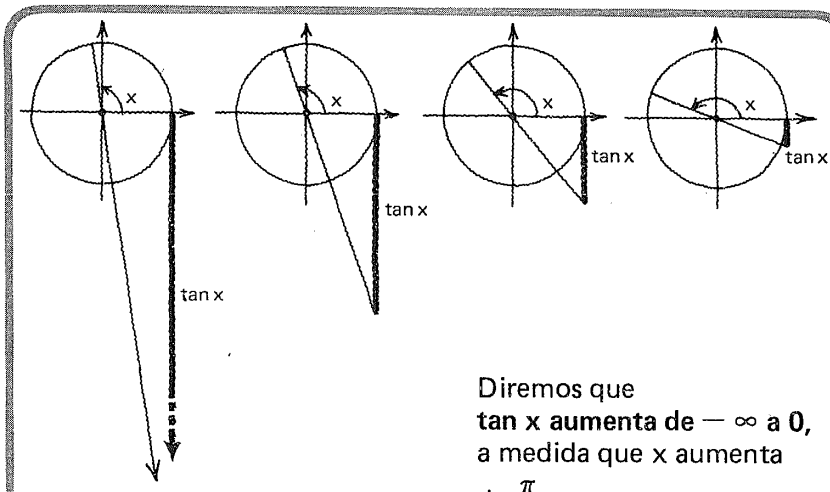
98

$f(x) = \tan x$

Debemos recordar que,
para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
tan x está representada por el segmento de medida negativa $\overleftarrow{TS}$.



99



Diremos que
tan x aumenta de $-\infty$ a 0,
a medida que x aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π.

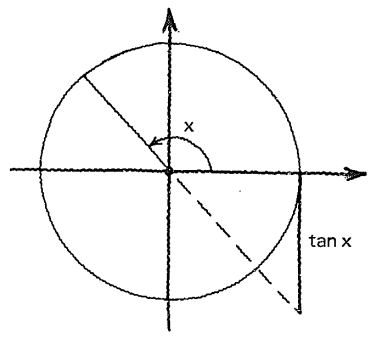
100

$f(x) = \tan x$

Por ejemplo:

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan \frac{2\pi}{3} =$ ⌊____⌋

$\doteq$ ⌊____⌋



ángulo de referencia

$\tan \frac{2\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3}$

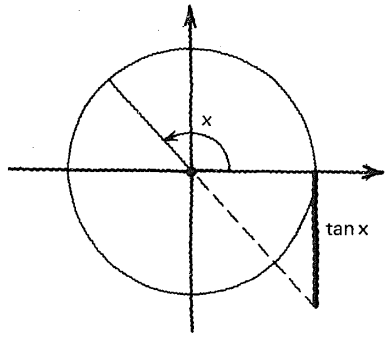
$\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\doteq -1.7321$

101

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{3\pi}{4} =$ ____



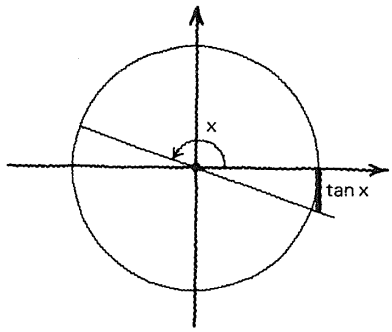
-1

102

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan \frac{5\pi}{6} =$ ____

$\doteq$ ____



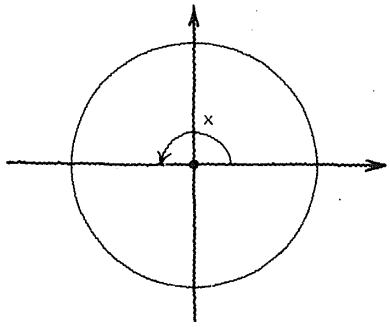
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

-0.5774

103

$f(x) = \tan x$

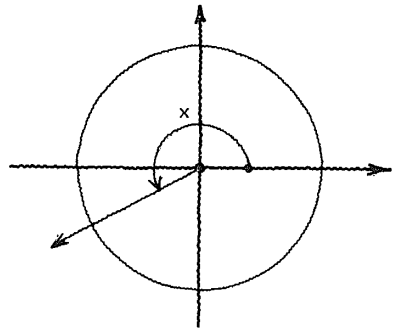
$f(\pi) = \tan \pi =$ ____

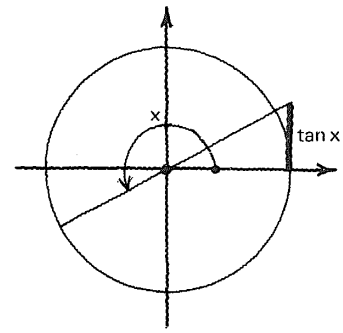


0

104

Trazar el segmento correspondiente a tan x.





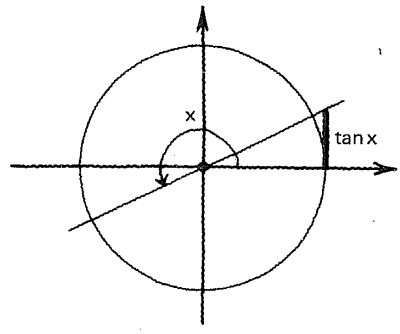
105

$f(x) = \tan x$

Por ejemplo:

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan \frac{7\pi}{6} =$ ____

$\doteq$ ____



$\frac{\sqrt{3}}{3}$

0.5774

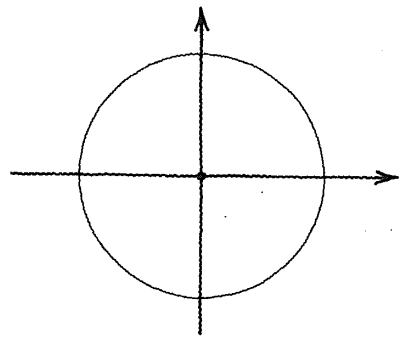
106

$f(x) = \tan x$

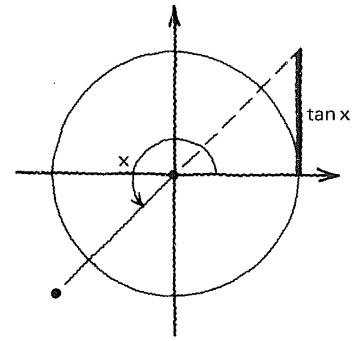
$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan \frac{5\pi}{4} =$ ____

$=$ ____

Trazar el segmento correspondiente a tan $\frac{5\pi}{4}$



- 1
- 1.0000



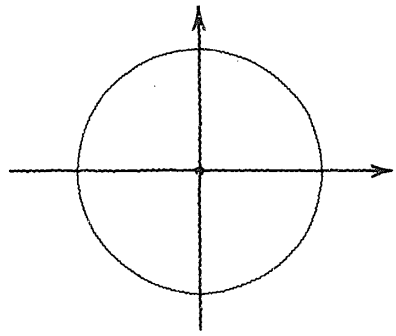
107

$f(x) = \tan x$

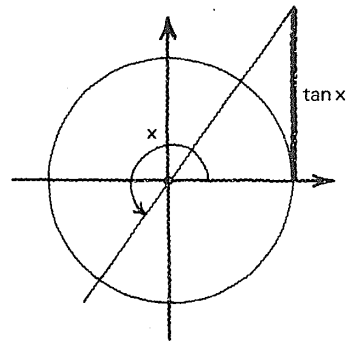
$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \tan \frac{4\pi}{3} = \square$

$\doteq \square$

Trazar el segmento correspondiente a $\tan \frac{4\pi}{3}$



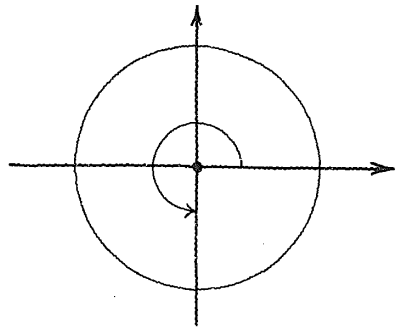
- $\sqrt{3}$
- 1.7321

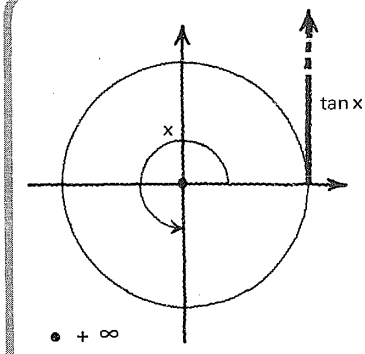


108

$f(x) = \tan x$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \tan \frac{3\pi}{2} = \square$





- $+\infty$

Debemos recordar que $+\infty$ no es un número sino un símbolo para representar cómo, a medida que x aumenta aproximándose a $\frac{3\pi}{2}$, tan x crece indefinidamente.

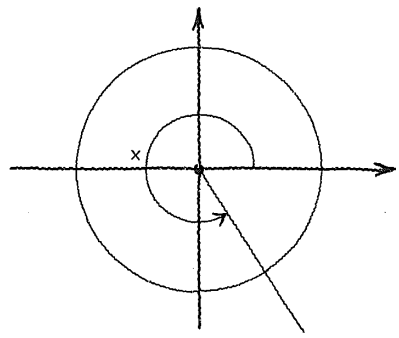
109

$f(x) = \tan x$

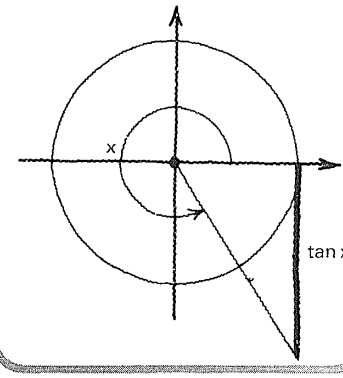
$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan \frac{5\pi}{3} = \square$

$\doteq \square$

Trazar el segmento correspondiente a $\tan \frac{5\pi}{3}$



- $-\sqrt{3}$
- $-$ 1.7321



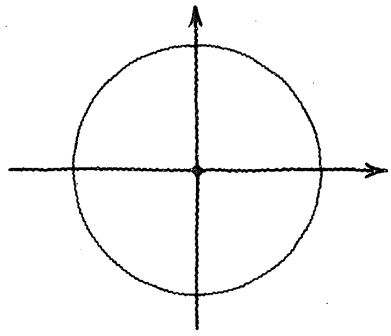
110

$f(x) = \tan x$

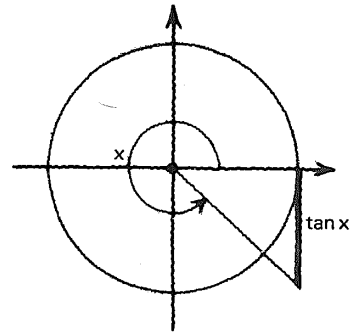
$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \tan \frac{7\pi}{4} =$ ⌊____⌋

$=$ ⌊____⌋

Trazar el segmento correspondiente a $\frac{7\pi}{4}$



- -1
- -1.0000



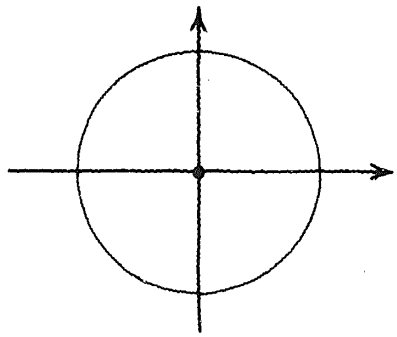
111

$f(x) = \tan x$

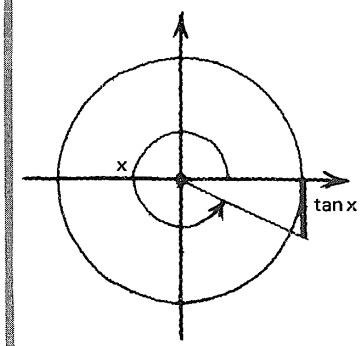
$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan \frac{11\pi}{6} =$ ⌊____⌋

$\doteq$ ⌊____⌋

Trazar el segmento correspondiente a $\tan \frac{11\pi}{6}$



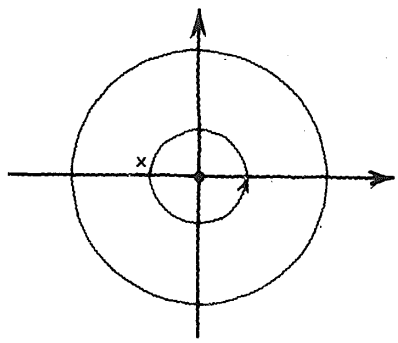
- $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- -0.5774



112

$f(x) = \tan x$

$f(2\pi) = \tan 2\pi =$ ⌊____⌋



0

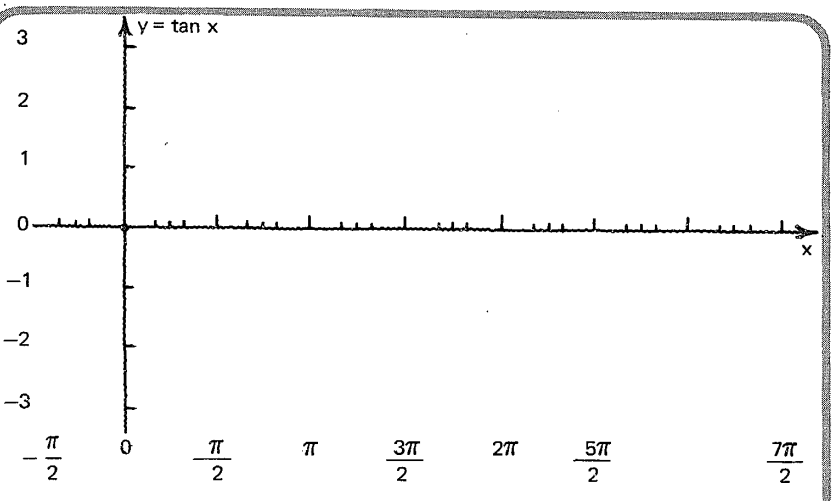
113

Reunamos en una tabla los valores obtenidos.

x	$y = \tan x$
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$5\pi/4$	
$4\pi/3$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$7\pi/4$	
$11\pi/6$	
2π	

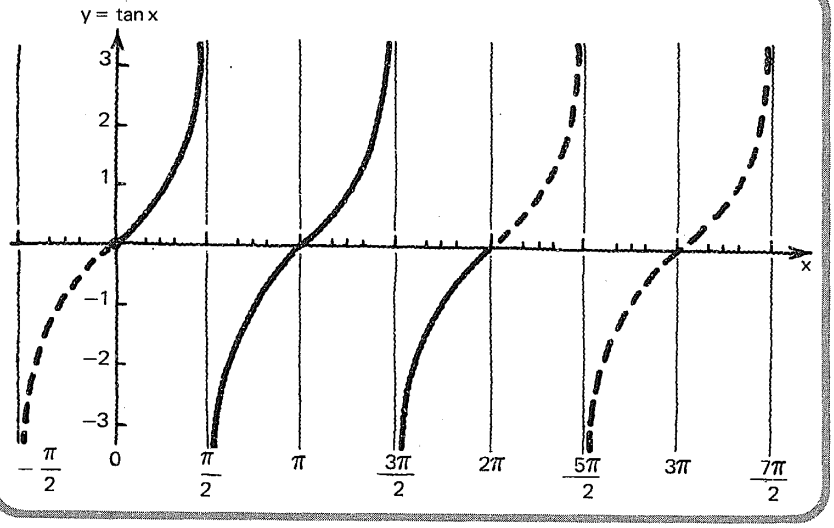
x	$y = \tan x$
0	0.0000
$\pi/6$	0.5774
$\pi/4$	1.0000
$\pi/3$	1.7321
$\pi/2$	no definida
$2\pi/3$	− 1.7321
$3\pi/4$	− 1.0000
$5\pi/6$	− 0.5774
π	0.0000
$7\pi/6$	0.5774
$5\pi/4$	1.0000
$4\pi/3$	1.7321
$3\pi/2$	no definida
$5\pi/3$	− 1.7321
$7\pi/4$	− 1.0000
$11\pi/6$	− 0.5774
2π	0.0000

114



Trazar la gráfica correspondiente a **y = tan x.**

Respuesta en el cuadro siguiente



115

¡Atención!

El **dominio** de la relación definida por **y = tan x** es:

$$\mathcal{R} - \left\{ \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots \right\}$$

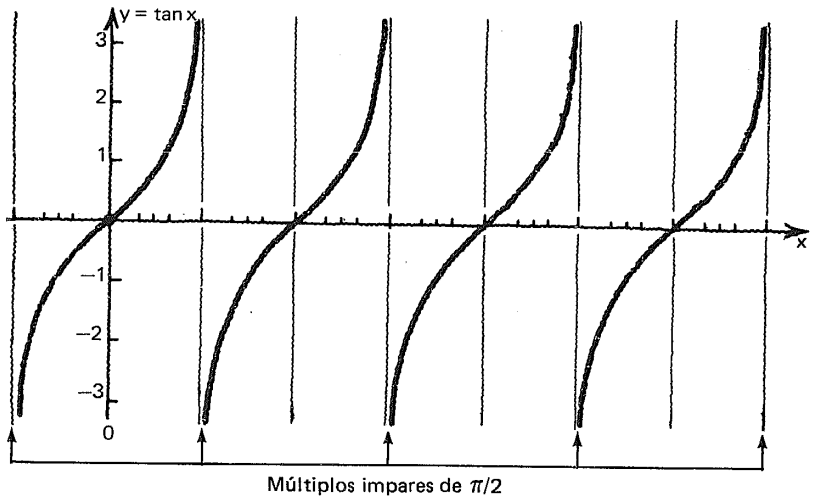
o bien:

$$\mathcal{R} - \left\{ x/x = k\frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar} \right\}$$

o bien:

el conjunto de todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$

116



Múltiplos impares de $\pi/2$

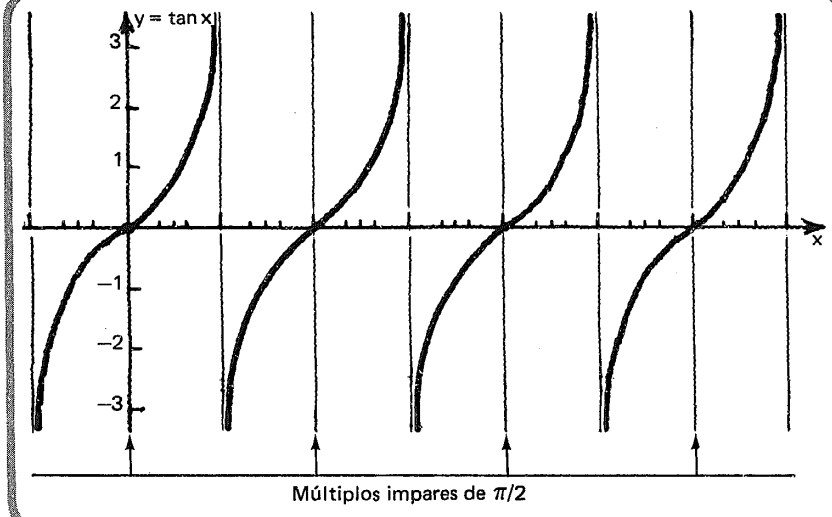
117

$f(x) = \tan x$ **no está definida**

para los múltiplos impares de $\pi/2$.

$\left(\frac{k\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ y } k \text{ impar}\right)$.

118



Múltiplos impares de $\pi/2$

119

Para los múltiplos pares de $\frac{\pi}{2}$

$f(x) = \tan x =$ ____

0

120

A medida que x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$, tan x crece rápidamente acercándose más y más a la recta vertical $x = \frac{\pi}{2}$; pero cuando $x = \frac{\pi}{2}$, tan x no se define.

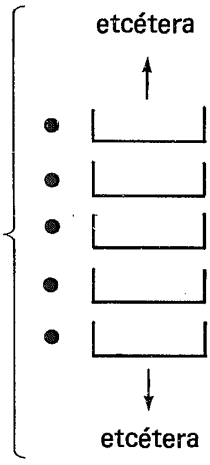
No perder de vista la gráfica del cuadro 116.

121

A una recta como $x = \frac{\pi}{2}$
a la cual se aproxima una curva todo lo que se quiera, pero sin llegar a intersecarla, se le llama **asíntota.**

122

Las **asíntotas** de la curva $y = \tan x$ son:



etcétera

- $x = -\frac{\pi}{2}$
- $x = \frac{\pi}{2}$
- $x = \frac{3\pi}{2}$
- $x = \frac{5\pi}{2}$
- $x = \frac{7\pi}{2}$

etcétera

o bien:

$x = \frac{k\pi}{2}$

en que $k \in \mathbb{Z}$ y k es impar.

123

Ahora bien, la relación definida por $y = \tan x$ ¿es una función?

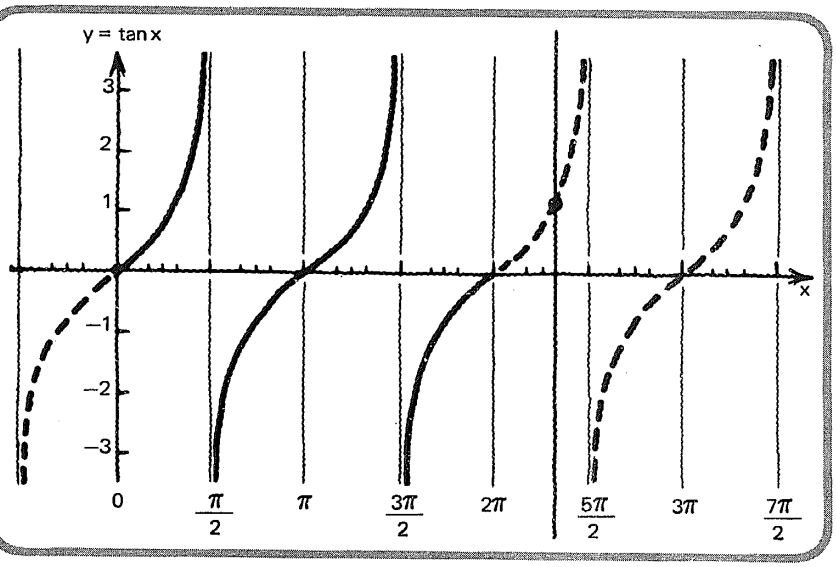
Sí/No

Porque

Sí

en su gráfica cartesiana, no es posible trazar una "vertical" que interseque a la gráfica en dos o más puntos.

124



125

Toda vertical (dentro del dominio) interseca a la gráfica de tan x en un punto único.

126

El **codominio** de la función definida por **y = tan x**

es [ ].

Por ejemplo:

$\mathbb{R}$

127

El **rango** de la función definida por $y = \tan x$ es $\lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$.

$\mathbb{R}$

128

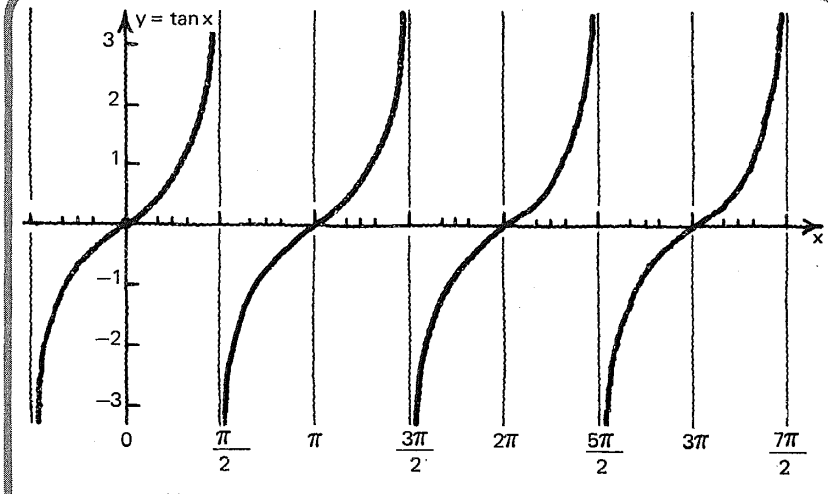
Queda, entonces, definida formalmente la **función tangente**, así:

$$F = \left\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}; y \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{y = \tan x}\right\}$$

o así:

$$F: \left\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}\right\} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbf{y = \tan x}$$

129



Observar cuidadosamente la gráfica y ver cuadro siguiente.

130

Señalar la opción correcta.

La función definida por **y = tan x** es →
- cualquiera ⌊____⌋.
- suprayectiva ⌊____⌋.
- inyectiva ⌊____⌋.
- biyectiva ⌊____⌋.

suprayectiva

131

¿La función definida por y = tan x, es una función **periódica?**

Sí/No

¿Por qué?

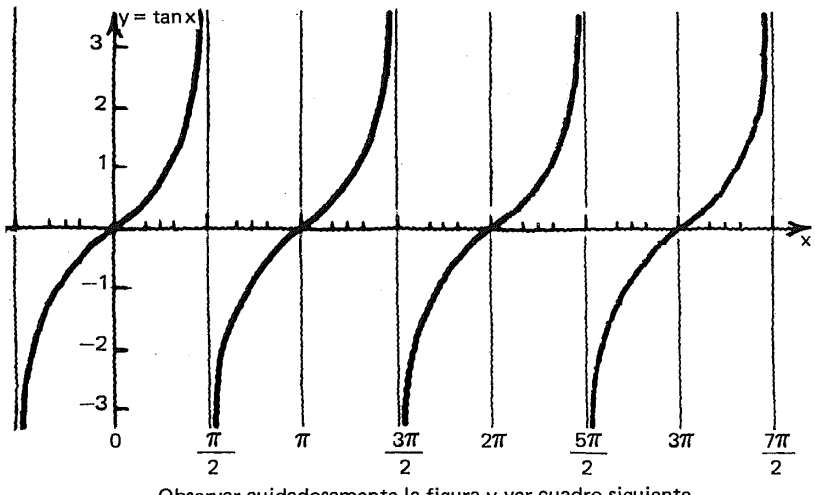
⌊_____⌋

Sí

Porque se verifica:

$f(x + p) = f(x) \; \forall \;$ **x.**

132



Observar cuidadosamente la figura y ver cuadro siguiente.

133

El **periodo** de la función definida por **y = tan x** es igual a [_____].

π

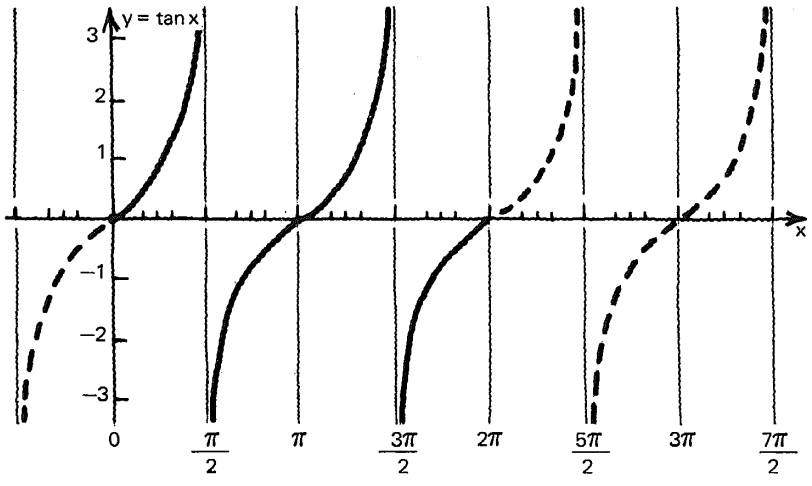
134

La función definida por y = tan x es periódica, con periodo p = π. Entonces, se verifica que

tan x = [_____]

tan (x + kπ) k $\in \mathbb{Z}$

135



Tener a la vista esta gráfica al estudiar el cuadro siguiente.

136

En el intervalo $[0, 2\pi]$:

$\tan x > 0$ para toda x, tal que $\square$

$\tan x = 0$ para toda x, tal que $\square$

$\tan x < 0$ para toda x, tal que $\square$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

$x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

5.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la gráfica cartesiana de la función definida por $y = \tan x$;
- *dar*, para la función definida por $y = \tan x$:

  —el dominio,
  —el codominio,
  —el rango,
  —el periodo;

- *explicar* por qué la expresión:

  $F: \left\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}\right\} \rightarrow \mathcal{R}/f(x) = \tan x$

  define una función suprayectiva;
- *explicar* lo que es una asíntota.

4.5

La función cotangente

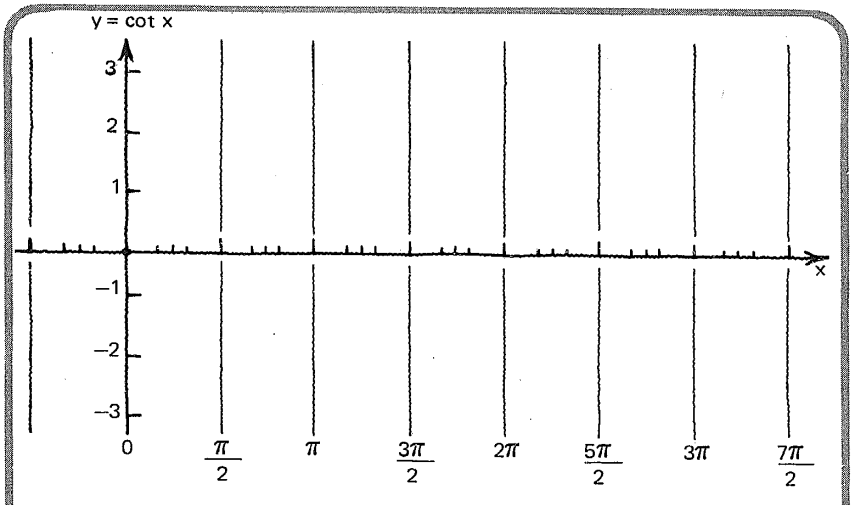
137

Con ayuda del círculo unitario completar la tabla. →

x	$y = \cot x$
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$5\pi/4$	
$4\pi/3$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$7\pi/4$	
$11\pi/6$	
2π	

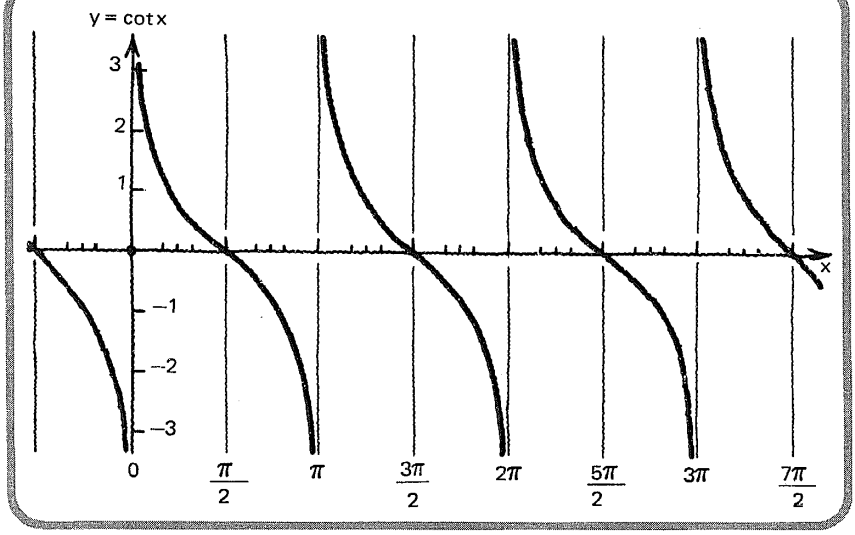
x	$y = \cot x$
0	no definida
$\pi/6$	1.7321
$\pi/4$	1.0000
$\pi/3$	0.5774
$\pi/2$	0.0000
$2\pi/3$	− 0.5774
$3\pi/4$	− 1.0000
$5\pi/6$	− 1.7321
π	no definida
$7\pi/6$	1.7321
$5\pi/4$	1.0000
$4\pi/3$	0.5774
$3\pi/2$	0.0000
$5\pi/3$	− 0.5774
$7\pi/4$	− 1.0000
$11\pi/6$	− 1.7321
2π	no definida

138



Trazar la gráfica cartesiana correspondiente a **y = cot x.**

Respuesta en el cuadro siguiente



139

¿La relación definida por
$y = \cot x$, es una función?

Sí/No

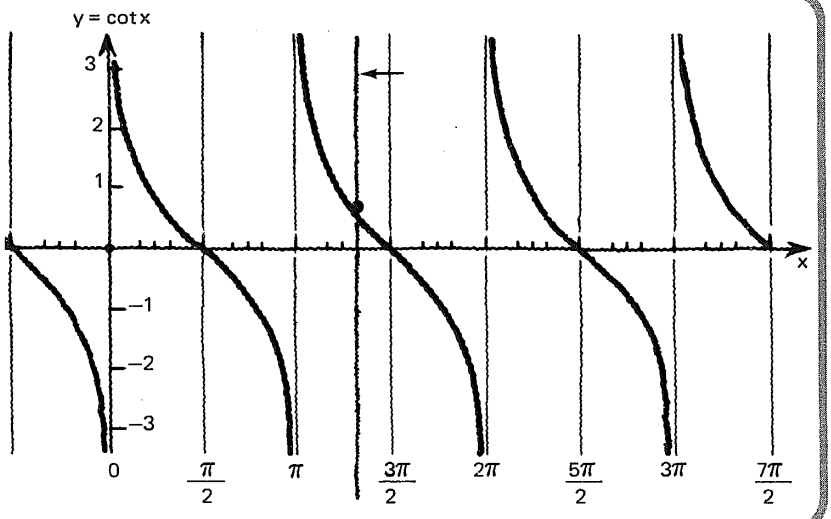
¿Por qué?

Sí

Porque en la gráfica cartesiana no es posible trazar una vertical que interseque a la gráfica en dos o más puntos.

Ver cuadro siguiente.

140



141

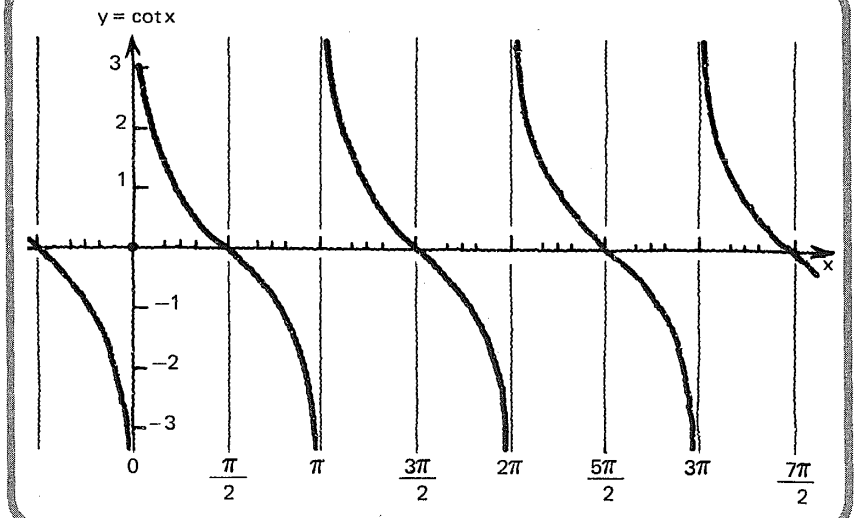
Observamos que **cot x** no se define para

- $x = k\pi$ en que $k \in \mathbb{Z}$ (o sea:

  los múltiplos pares de $\frac{\pi}{2}$ o bien:

  los múltiplos de π)

142



143

Las **asíntotas** de la curva correspondiente a **y = cot x** son:

etcétera

↑

$x = -\pi$

$x = 0$

$x = \pi$

$x = 2\pi$

$x = 3\pi$

$x = 4\pi$

↓

etcétera

o bien:

$x = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

144

El **dominio** de la función definida por **y = cot x** es

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

145

El **codominio** de la función definida por **y = cot x** es

Por ejemplo:

$\mathbb{R}$

146

El **rango** de la función definida por **y = cot x** es

147

Definición de la función cotangente.

[ ]

o bien:

[ ]

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} \wedge y = \cot x\}$

$F: \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} / y = \cot x$

148

La función definida por $y = \cot x$
es/no es periódica,

porque

[ ].

es

se verifica

$f(x + p) = f(x)$
para todos los valores de x

149

El **periodo** de la función
definida por $y = \cot x$
es igual a [ ].

Se verifica que:

$\cot x = \cot$ [ ]

π

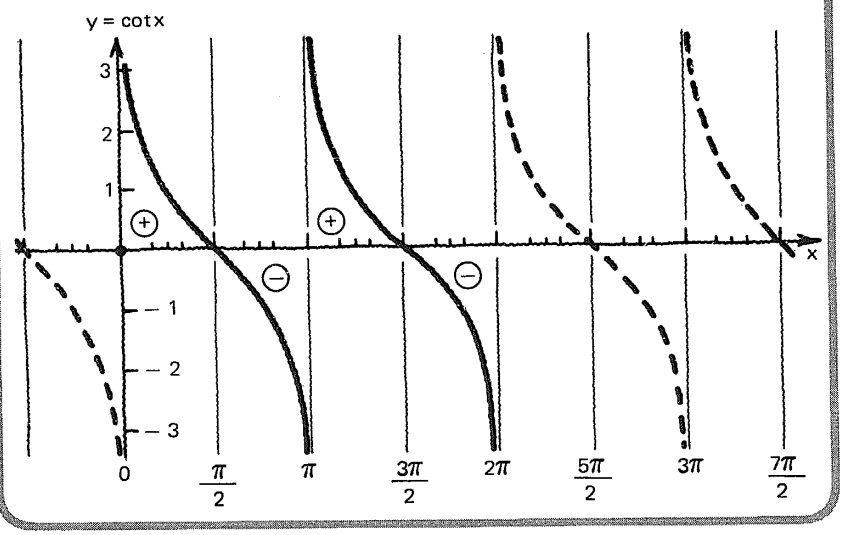
$(x + k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

150

La función definida por $y = \cot x$ es →
- cualquiera ☐
- suprayectiva ☐
- inyectiva ☐
- biyectiva ☐

suprayectiva

151



152

En el intervalo $[0, 2\pi]$

$\cot x > 0$ para toda x, tal que ☐

$\cot x = 0$ para toda x, tal que ☐

$\cot x < 0$ para toda x, tal que ☐

$x \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$

$x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

5.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la gráfica cartesiana de la función definida por $y = \cot x$;
- *dar*, para la función definida por $y = \cot x$:

  —el dominio,
  —el codominio,
  —el rango,
  —el periodo;

- *explicar* por qué la expresión:

  $F: \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \cot x$

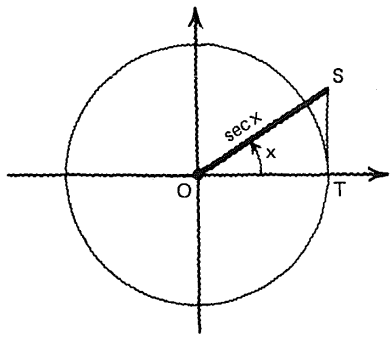
  define una función suprayectiva.

4.6

La función secante.

153

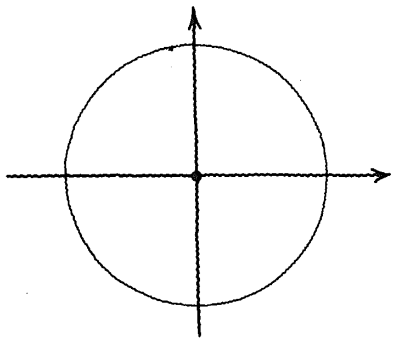
Recordemos que, en el círculo unitario, **sec x** aparece representada por el segmento $\overleftrightarrow{OS}$, (si $0 < x < \pi/2$).



154

$f(x) = \sec x$

$f(0) = \sec 0 =$ ⌊___⌋



1

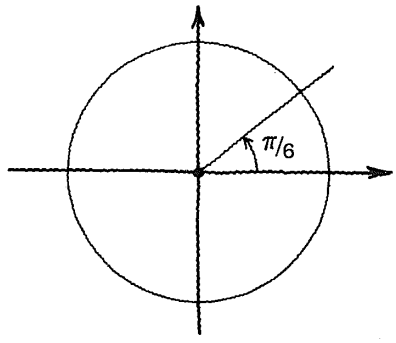
155

$f(x) = \sec x$

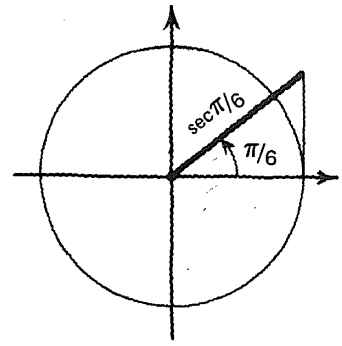
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sec \frac{\pi}{6} =$ ⌊ ⌋

$\doteq$ ⌊ ⌋

Trazar el segmento correspondiente a sec $\pi/6$.



- $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 1.1547



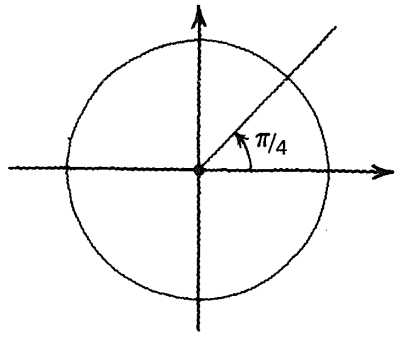
156

$f(x) = \sec x$

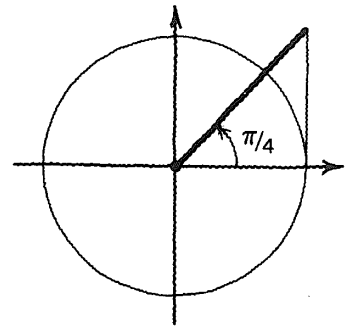
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec \frac{\pi}{4} =$ ⌊ ⌋

$\doteq$ ⌊ ⌋

Trazar el segmento correspondiente a sec $\pi/4$.



- $\sqrt{2}$
- 1.4142

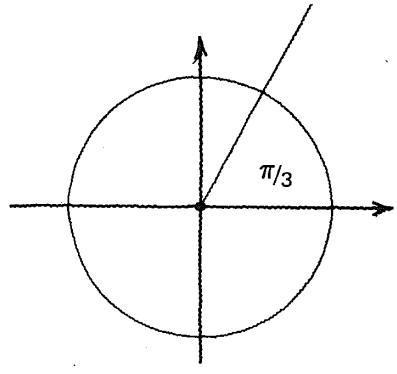


157

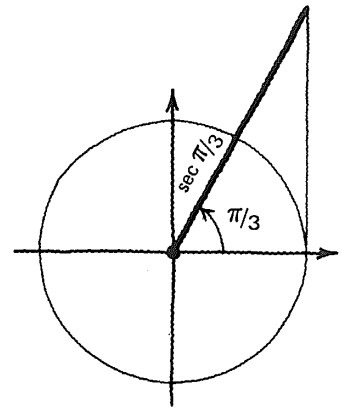
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec \frac{\pi}{3} =$ ⌊ ⌋

Trazar el segmento correspondiente a sec $\pi/3$.



- 2

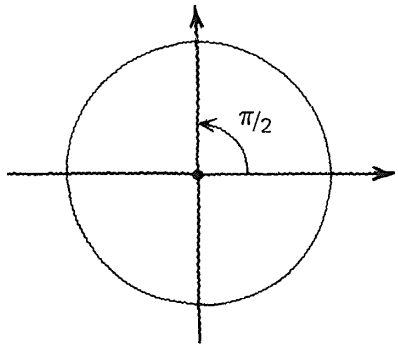


158

$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sec \frac{\pi}{2} =$ ⌊_____⌋

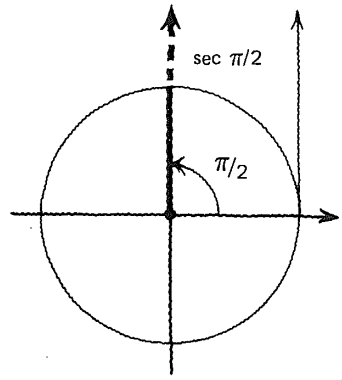
Trazar el segmento correspondiente a sec $\pi/2$.



- no definida

podemos escribir:

$\sec \frac{\pi}{2} = +\infty$

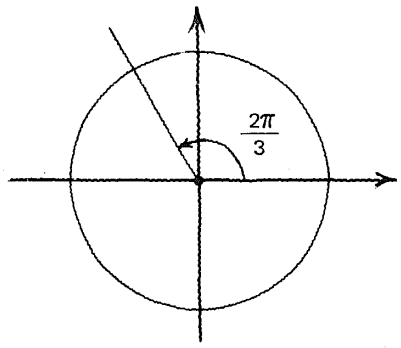


159

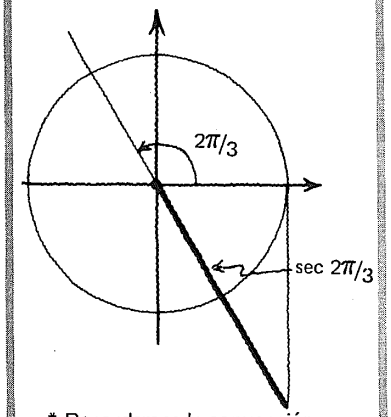
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sec \frac{2\pi}{3} =$ ⌊_____⌋

Trazar el segmento correspondiente a sec $2\pi/3$.



- -2*



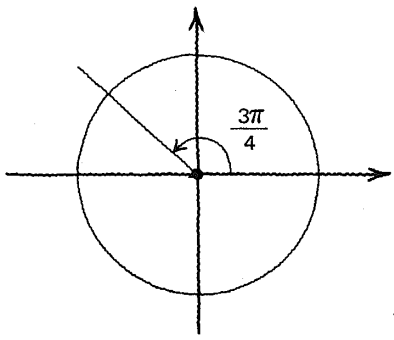
* Recordemos la convención establecida para el signo de la secante.

160

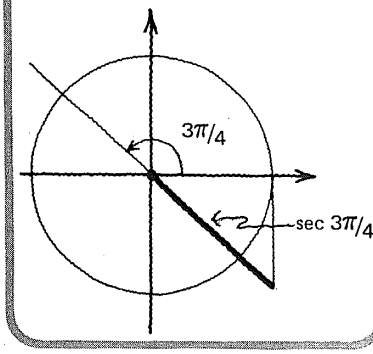
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sec \frac{3\pi}{4} =$ ⌊_____⌋

$\doteq$ ⌊_____⌋



- $-\sqrt{2}$
- -1.4142

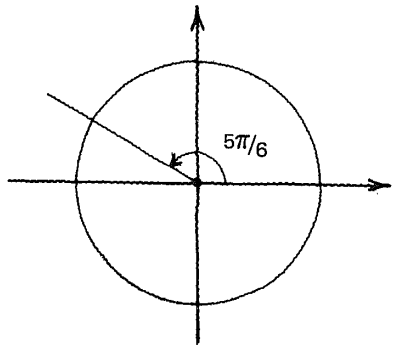


161

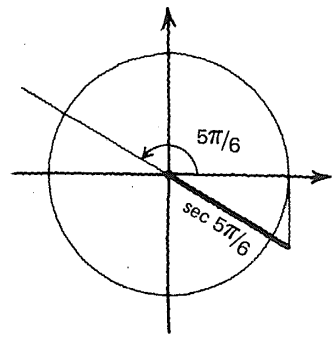
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sec \frac{5\pi}{6} =$ _____

$\doteq$ _____



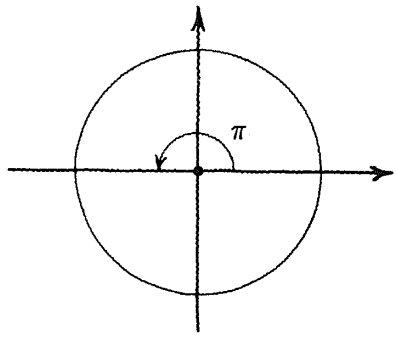
- $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- -1.1547



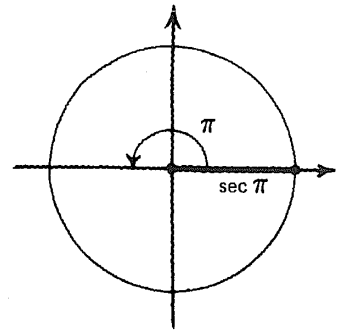
162

$f(x) = \sec x$

$f(\pi) = \sec \pi =$ _____



- -1

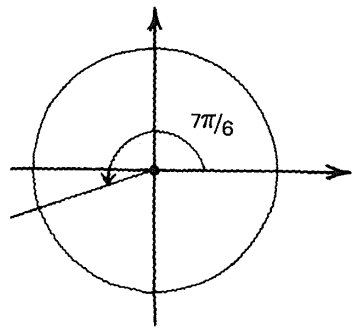


163

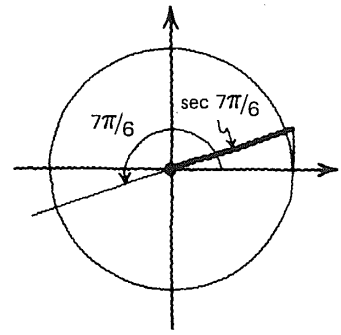
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sec 7\pi/6 =$ _____

$\doteq$ _____



- $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- -1.1547

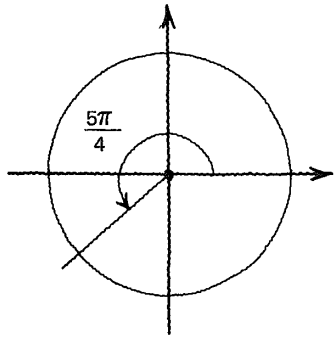


164

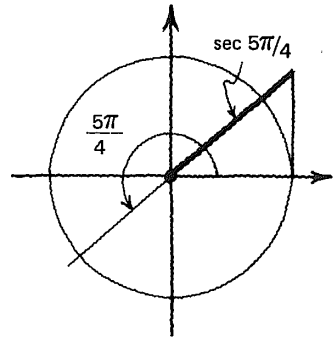
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sec \frac{5\pi}{4} =$ ____

$\doteq$ ____



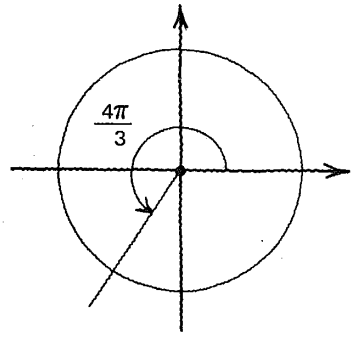
- $-\sqrt{2}$
- -1.4142



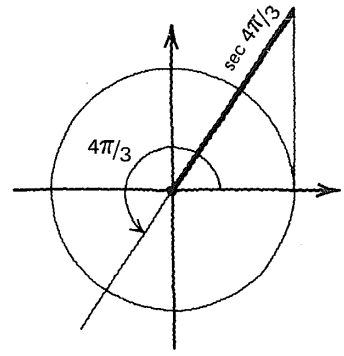
165

$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sec 4\pi/3 =$ ____



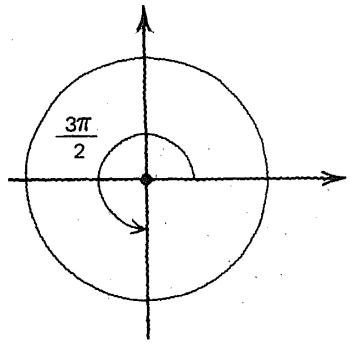
- -2



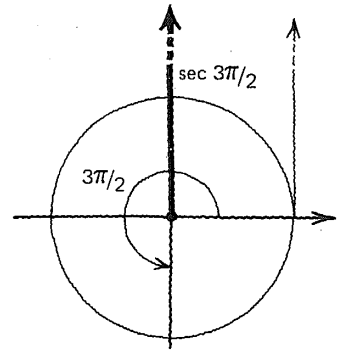
166

$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sec 3\pi/2 =$ ____



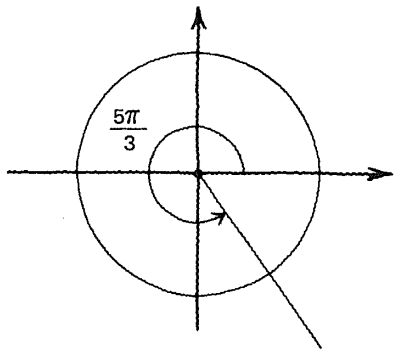
- no definida, podemos escribir $\sec \frac{3\pi}{2} = -\infty$



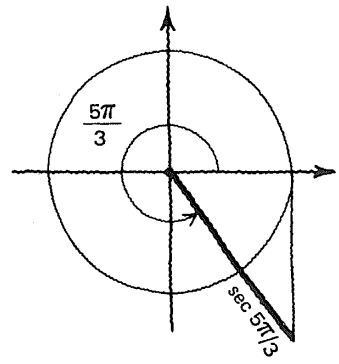
167

$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec \frac{5\pi}{3} = \square$



- 2

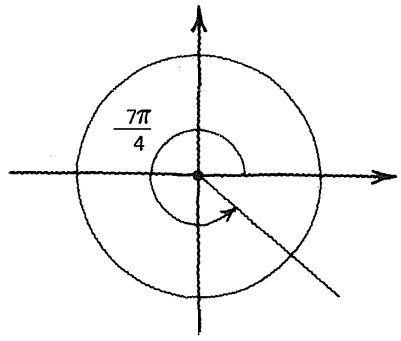


168

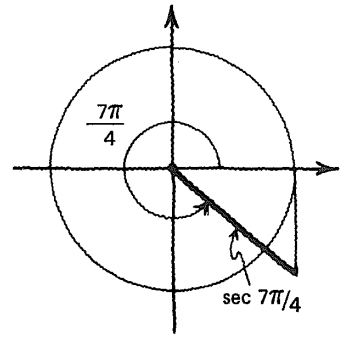
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sec \frac{7\pi}{4} = \square$

$\doteq \square$



- $\sqrt{2}$
- 1.4142

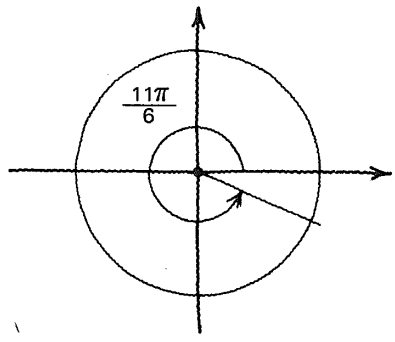


169

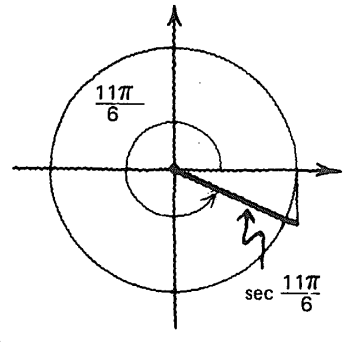
$f(x) = \sec x$

$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sec \frac{11\pi}{6} = \square$

$\doteq \square$



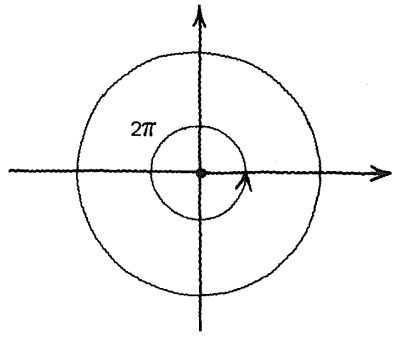
- $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 1.1547



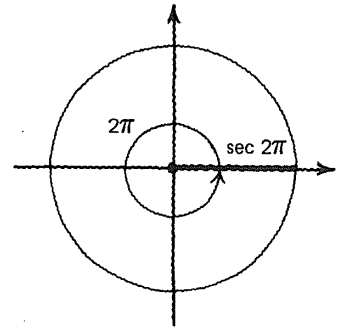
170

$f(x) = \sec x$

$f(2\pi) = \sec 2\pi =$ ⌊____⌋



● 1



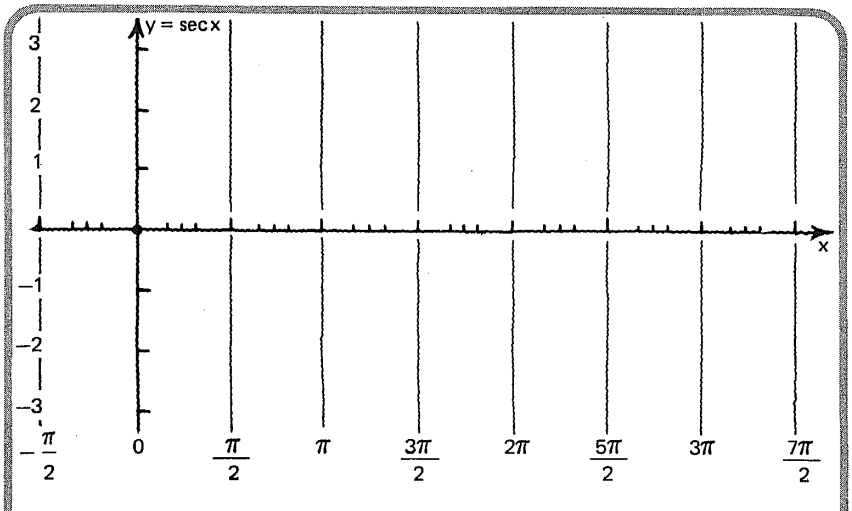
171

Completemos.

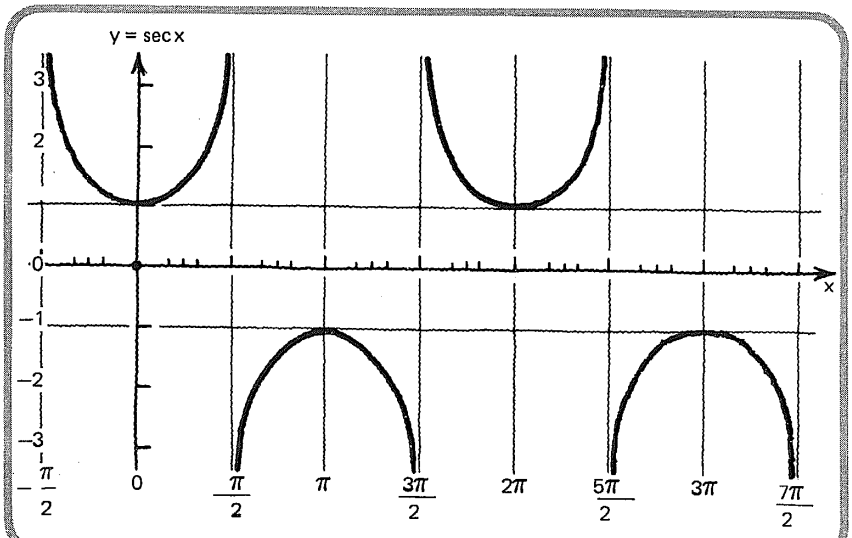
x	$y = \sec x$
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$5\pi/4$	
$4\pi/3$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$7\pi/4$	
$11\pi/6$	
2π	

x	$y = \sec x$
0	1.0000
$\pi/6$	1.1547
$\pi/4$	1.4142
$\pi/3$	2.0000
$\pi/2$	no definida
$2\pi/3$	− 2.0000
$3\pi/4$	− 1.4142
$5\pi/6$	− 1.1547
π	− 1.0000
$7\pi/6$	− 1.1547
$5\pi/4$	− 1.4142
$4\pi/3$	− 2.0000
$3\pi/2$	no definida
$5\pi/3$	2.0000
$7\pi/4$	1.4142
$11\pi/6$	1.1547
2π	1.0000

172



Respuesta
en el
cuadro siguiente



173

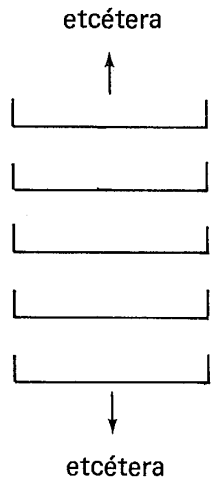
¿Tiene **asíntotas** la curva correspondiente a **y = sec x** ?

Sí/No

Sí

174

Las **asíntotas** de la curva correspondiente a **y = sec x** son:



etcétera

- $x = -\frac{\pi}{2}$
- $x = \frac{\pi}{2}$
- $x = \frac{3\pi}{2}$
- $x = \frac{5\pi}{2}$
- $x = \frac{7\pi}{2}$

etcétera

o bien:

$x = \frac{k\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$ y k es impar.

175

Es decir que:

$f(x) = \sec x$ no se define para:

$x = \frac{k\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z} \wedge k$ es impar

o sea, para los múltiplos impares de $\pi/2$

176

Señalar la opción correcta y completar.

La relación definida por $y = \sec x$ **es/no es** una función, porque:

es

en su gráfica cartesiana no es posible trazar una recta vertical que interseque a la gráfica en dos o más puntos

177

El **dominio** de la función definida por $y = \sec x$ es

$\left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \right\}$

$k \in \mathbb{Z} \wedge k$ es impar

o bien, el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$

178

El **rango** de la función definida por **y = sec x** es

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y \leqslant -1 \vee y \geqslant 1\}$

o bien:

todos los números reales, excepto los comprendidos entre -1 y 1, exclusive

179

La función definida por **y = sec x**, ¿es **periódica**?

Sí/No

En caso de serlo, el **periodo p** es igual a

Sí

2π

180

Siendo periódica, con $p = 2\pi$, la función definida por $y = \sec x$, debe verificarse que

$\sec x = \sec (x + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$

181

Definición de la función secante.

$$F = \left\{ (x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}; y \in \mathbb{R} \wedge y = \sec x \right\}$$

$$F: \left\{ x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar} \right\} \rightarrow \mathbb{R}/y = \sec x$$

182

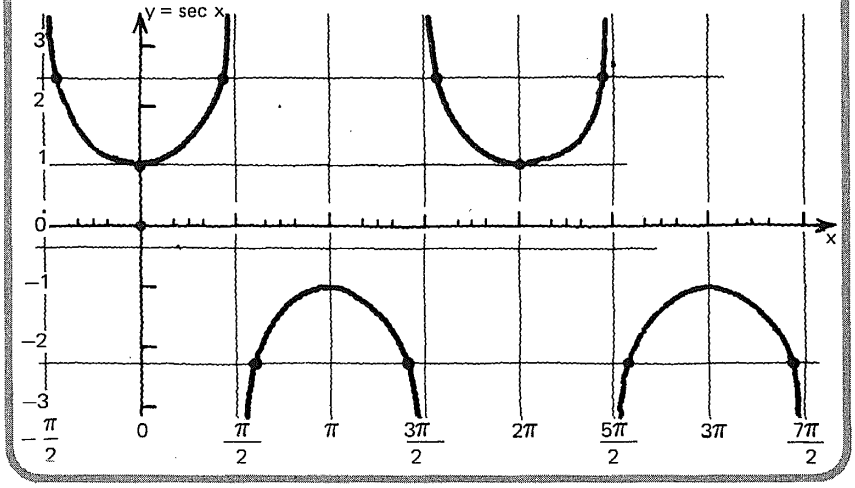
Señalar la opción correcta.

Así definida, la función secante es →
- cualquiera
- suprayectiva
- inyectiva
- biyectiva

cualquiera

183

Observar con atención.



184

Vemos que una "horizontal" interseca a la gráfica en un número indiferente de puntos.

185

Señalar la opción correcta.

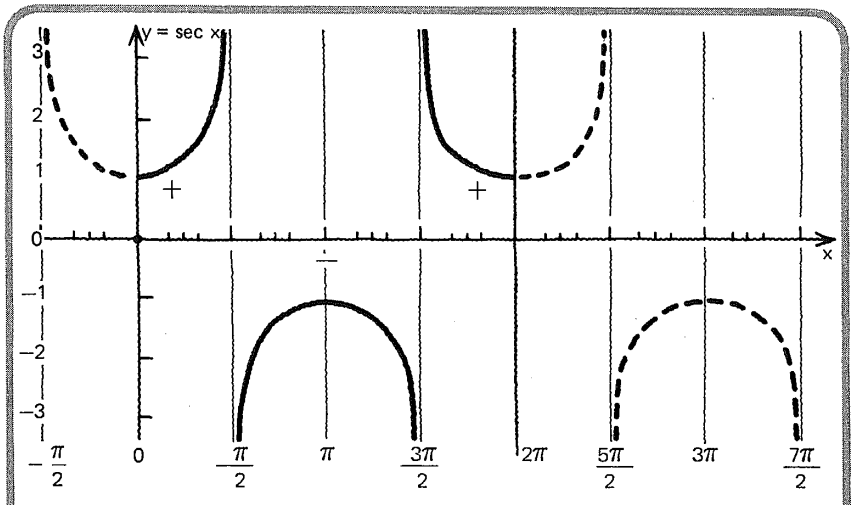
Definida en términos del dominio y el rango, así:

$$F = \left\{ (x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}; y \in \mathbb{R} \right.$$
$$\left. \wedge (y \leqslant -1 \vee y \geqslant 1) \wedge y = \sec x \right\}$$

la función secante es una { suprayección ⌊__⌋ / biyección ⌊__⌋

suprayección

186



Consultar esta gráfica mientras estudiamos el siguiente cuadro.

187

En el intervalo $[0, 2\pi]$:

sec $x > 0$ para toda x, tal que $\left[\quad\right]$

sec $x = 0$ para toda x, tal que $\left[\quad\right]$

sec $x < 0$ para toda x, tal que $\left[\quad\right]$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

(sec x nunca es igual a 0)

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

5.4.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la gráfica cartesiana de la función definida por $y = \sec x$;
- *dar*, para la función definida por $y = \sec x$:

  —el dominio,
  —el codominio,
  —el rango,
  —el periodo;

- *explicar* por qué la expresión:

$$F = \left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}; y \in \mathcal{R} \wedge y = \sec x\right\}$$

define una función cualquiera,
y por qué la expresión:

$$F = \left\{(x, y)/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq \frac{k\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge k \text{ es impar}; y \in \mathcal{R} \wedge (y \leqslant -1 \vee y \geqslant 1) \wedge y = \sec x\right\}$$

define una función suprayectiva.

4.7

La función cosecante

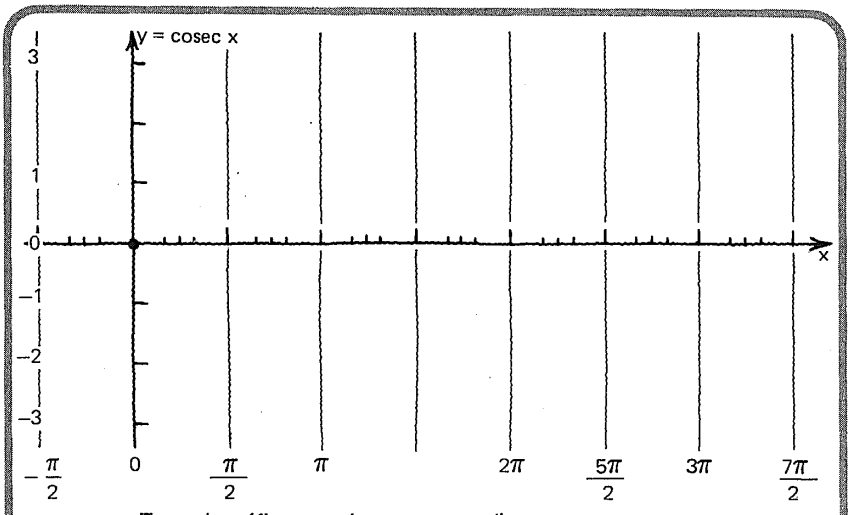
188

Con ayuda del círculo unitario completar la tabla. →

x	$y = \text{cosec } x$
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$2\pi/3$	
$3\pi/4$	
$5\pi/6$	
π	
$7\pi/6$	
$5\pi/4$	
$4\pi/3$	
$3\pi/2$	
$5\pi/3$	
$7\pi/4$	
$11\pi/6$	
2π	

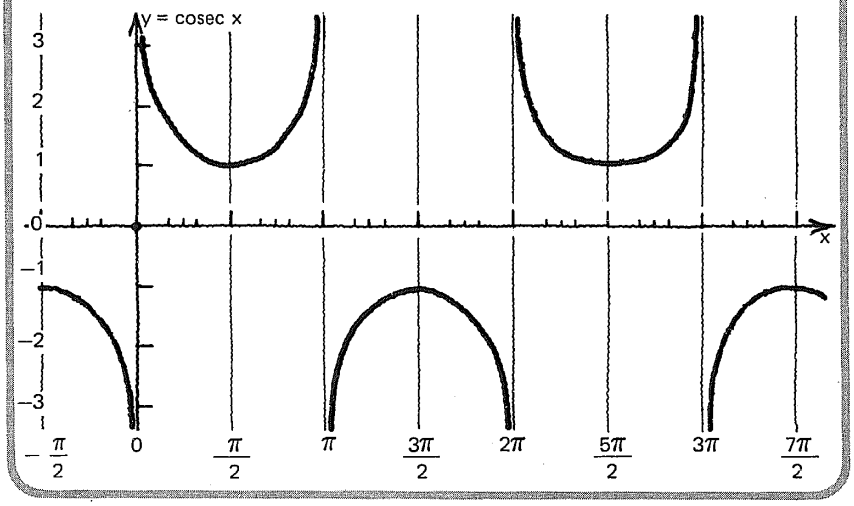
x	$y = \text{cosec } x$
0	no definida
$\pi/6$	2.0000
$\pi/4$	1.4142
$\pi/3$	1.1547
$\pi/2$	1.0000
$2\pi/3$	1.1547
$3\pi/4$	1.4142
$5\pi/6$	2.0000
π	no definida
$7\pi/6$	− 2.0000
$5\pi/4$	− 1.4142
$4\pi/3$	− 1.1547
$3\pi/2$	− 1.0000
$5\pi/3$	− 1.1547
$7\pi/4$	− 1.4142
$11\pi/6$	− 2.0000
2π	no definida

189



Trazar la gráfica cartesiana correspondiente a **y = cosec x.**

Respuesta en el cuadro siguiente



190

cosec x no está definida para: ➡

etcétera
↑
$x = -\pi$

$x = 0$

$x = \pi$

$x = 2\pi$

$x = 3\pi$
↓
etcétera

o sea: $x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

o sea:
los múltiplos pares de $\frac{\pi}{2}$
o
los múltiplos de π

191

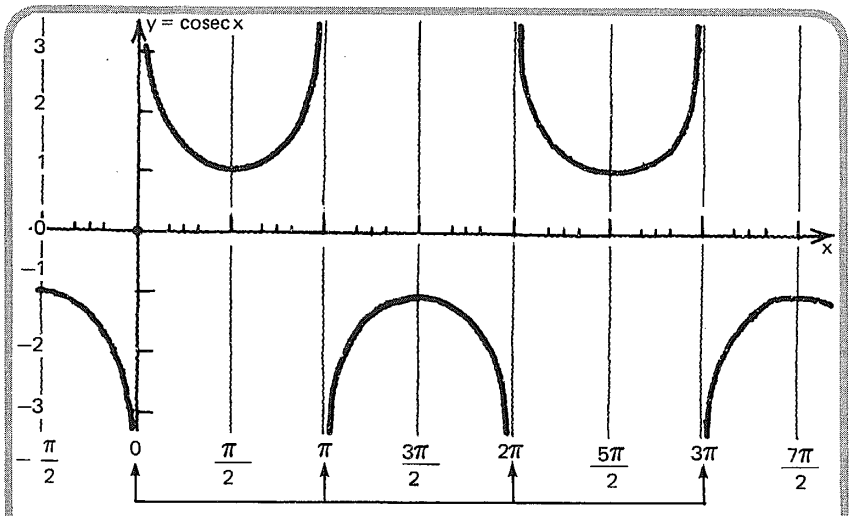
Las **asíntotas** de la relación definida por **y = cosec x** son:

_____

expresadas en forma compacta.

$x = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

192



193

Señalar la opción correcta y completar.

La relación definida por $y = \text{cosec } x$ **es/no es** una función, porque

_____ .

es

en su gráfica cartesiana, no es posible trazar una "vertical" que interseque a la gráfica en dos o más puntos

194

El **dominio** de la función definida por $y = \text{cosec } x$ es

_____

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

195

El **rango** de la función definida por $y = \textbf{cosec}\ x$ es

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge (y \leq -1 \vee y \geq 1)\}$

196

Definición de la función cosecante.

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z};\ y \in \mathbb{R} \wedge y = \text{cosec } x\}$

ó

$F: \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\ \{\rightarrow \mathbb{R}/y = \text{cosec } x$

197

La expresión

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R} \wedge y = \text{cosec } x\}$

define una función { cualquiera ; suprayectiva ; inyectiva ; biyectiva

cualquiera

198

La expresión

$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R}$

$\wedge (y \leqslant -1 \vee y \geqslant 1) \wedge y = \operatorname{cosec} x\}$

define una función { suprayectiva ☐ ; biyectiva ☐ }

suprayectiva

199

La función definida por $y = \operatorname{cosec} x$ es **periódica** con periodo $p =$ ☐

2π

200

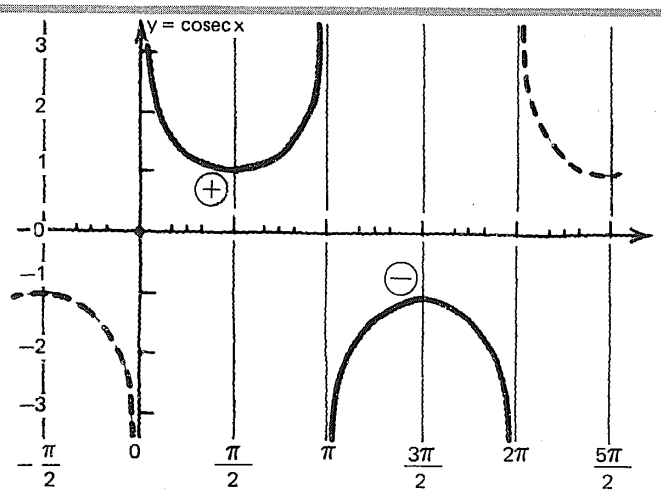
Siendo la función definida por $y = \operatorname{cosec} x$ periódica, con periodo $p = 2\pi$ debe verificarse que:

☐

$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} (x + 2k\pi)$

$k \in \mathbb{Z}$

201



Ver esta gráfica mientras se estudia el cuadro siguiente.

202

En el intervalo $[0, 2\pi]$

cosec x $>$ 0 para toda x, tal que $\underline{\qquad\qquad}$ $x \in (0, \pi)$

cosec x $=$ 0 para toda x, tal que $\underline{\qquad\qquad}$ (cosec x nunca es igual a 0)

cosec x $<$ 0 para toda x, tal que $\underline{\qquad\qquad}$ $x \in (\pi, 2\pi)$

203

Quedan así definidas las
6 funciones trigonométricas (*)
cuyas reglas de correspondencia
se expresan así:

1. y = sen x función seno
2. y = cos x función coseno
3. y = tan x función tangente
4. y = cot x función cotangente
5. y = sec x función secante
6. y = cosec x función cosecante

(*) Designaremos indistintamente con este nombre a las funciones propiamente dichas o a sus reglas de correspondencia.

204

Simbolizaremos así: $f_t(x)$

Cualquiera de las 6 funciones trigonométricas.

205

Resumen 1. Las 6 funciones trigonométricas $y = f_t(x)$.

función	*dominio*	*rango*	*regla*	*periodo*
seno	$\mathfrak{R}$ (todos los números reales)	$[-1, 1]$	$f(x) = \text{sen } x$	2π
coseno	$\mathfrak{R}$ (todos los números reales)	$[-1, 1]$	$f(x) = \cos x$	2π
tangente	$\mathfrak{R} \bigwedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$	$\mathfrak{R}$ (todos los números reales)	$f(x) = \tan x$	π
cotangente	$\mathfrak{R} \bigwedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\mathfrak{R}$ (todos los números reales)	$f(x) = \cot x$	π
secante	$\mathfrak{R} \bigwedge x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$	$\mathfrak{R} - (-1, 1)$	$f(x) = \sec x$	2π
cosecante	$\mathfrak{R} \bigwedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\mathfrak{R} - (-1, 1)$	$f(x) = \text{cosec } x$	2π

5.4.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la gráfica cartesiana de la función definida por $y = \text{cosec } x$;
- *dar*, para la función definida por $y = \text{cosec } x$:

  —el dominio,
  —el codominio,
  —el rango,
  —el periodo;

- *explicar* por qué la expresión:

  $$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R} \wedge y = \text{cosec } x\}$$

  define una función cualquiera,
  y la expresión:

  $$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{R} \wedge (y \leqslant -1 \vee y \geqslant 1) \wedge y = \text{cosec } x\}$$

  define una función suprayectiva.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100